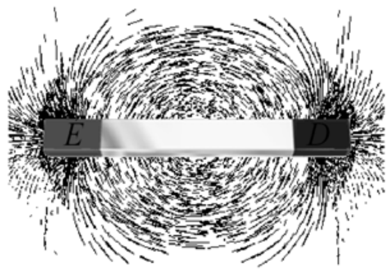
Mágnesesség, elektrodinamika

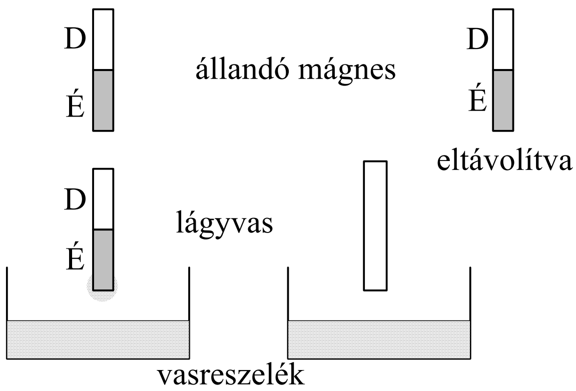
Mágneses alapjelenségek: Egyes vasércek, például magnetit (Fe_3O_4) képesek apró vasdarabokat magukhoz vonzani. A mágneses test és a vasdarab között mindig vonzó a kölcsönhatás. Az ilyen mágneseket permanens vagy állandó mágneseknek nevezzük. Tapasztalat szerint az acél felmágnesezhető egy mágneses érc segítségével. Egy acél mágnestű két végét pólusnak nevezzük, a vasreszelék csak ide tapad. Ezt a jelenséget egy mágnesrúd segítségével könnyen bemutathatjuk.



Vasreszelék rúdmágnes körül

Tapasztalat szerint egy felfüggesztett mágnestű a földrajzi É-D irányba áll be, tehát a Földnek is van mágneses mezője. Azt a pólust, amely a stabil egyensúlyi helyzetben É- felé néz, É-i pólusnak nevezzük, a másikat, pedig D-i pólusnak. Két mágnestű egynemű pólusait közelítve taszítóerő, a különnemű pólusok között, pedig vonzóerő lép fel.

A lágyvas felmágnesezhető, azonban a mágnes eltávolításakor mágneses tulajdonságát elveszti. A jelenséget mágneses polarizációnak nevezzük.



A lágyvas felmágnesezése

A tapasztalat szerint semmilyen módon nem érhető el, hogy egy testben a kétfajta mágnesség közül az egyik túlsúlyba kerüljön. Még az elemi részeknek, például az elektronnak is ugyanannyi az É-i, mint a D-i mágnessége. Mágneses töltés, mágneses monopólus tehát nem létezik. A legegyszerűbb mágneses alakzat a mágneses dipólus. Az elektromos influenciának, vagy megosztásnak nincs mágneses megfelelője.

A tapasztalat szerint a mozgó töltés, például árammal átjárt vezető közelébe helyezett mágnestű elfordul. A mozgó töltés tehát nemcsak elektromos, hanem mágneses mezőt is kelt, és ebben a mágneses dipólusra forgatónyomaték hat. A hatás kölcsönös, mivel áramjárta vezetőre mágneses mezőben erő hat, ezt Ampere-erőnek nevezzük.

A mágneses indukció-vektor bevezetése: A mágneses mezőt jellemző vektort, a $\vec{B}$ mágneses indukcióvektort az Ampère-erő segítségével definiáljuk. Az áramelemet a mágneses mező egy tetszőleges pontjába helyezzük, és mérjük a rá ható erőt. Az áramelemre jellemző adatok az áramerősség I, és az ívelemvektor $\Delta\vec{r}$, ennek hossza Δs.

A mérési tapasztalatok szerint az áramelemre mágneses mezőben vele párhuzamos erő nem hat, az erő mindig merőleges az áramelemre $\Delta\vec{F} \perp \Delta\vec{r}$. A vizsgált P ponton át felvehető egy olyan kitüntetett *e* egyenes, amelynek irányába állítva az áramelemet $\Delta\vec{r} \parallel e$ rá erő nem hat, $\Delta\vec{F} = \vec{0}$. Ha az áramelem α szöget zár be az *e* egyenessel, akkor az erő merőleges a $\Delta\vec{r}$ és *e* síkjára és nagysága arányos az I árammal, valamint $|\Delta\vec{r}_{\perp}| = \Delta s \sin\alpha$-val. A $\frac{\Delta F}{\mathrm{I}\,\Delta s \sin\alpha}$ hányados az áramelem adataitól már nem függ, kizárólag a mágneses mezőt jellemzi a P pontban, ezt nevezzük a mágneses indukció nagyságának a kérdéses pontban.

$$B = \frac{\Delta F}{\mathrm{I}\,\Delta s \sin\alpha}$$

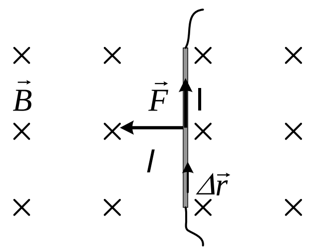
A mágneses indukció iránya pedig párhuzamos az *e* kitüntetett egyenessel, és értelme olyan, hogy $\Delta\vec{F}, \Delta\vec{r}$ és $\vec{B}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkosson $\{\Delta\vec{F}\,\Delta\vec{r}\,\vec{B}\}$. A mágneses indukció mértékegysége: $[B] = 1\frac{N}{Am} = 1\frac{Nm}{Am^2} = 1\frac{VAs}{Am^2} = 1\frac{Vs}{m^2} = 1\,tesla = 1T$

Ezt felhasználva az Ampère-erő képlete:

$$\Delta\vec{F} = \mathrm{I}\Delta\vec{r} \times \vec{B}$$

Egy vékony vonalas vezetőre ható erőt a vezetőszakaszra való integrálással kaphatjuk meg:

$$\vec{F} = I\int(d\vec{r} \times \vec{B})$$



Ampère-erő iránya

Tekintsünk egy *l* hosszúságú *A* keresztmetszetű vonalas vezetőszakaszt, és az legyen merőleges a homogén mágneses mezőre, (lásd az ábra). Ekkor az erő iránya az ábrán látható, a nagysága pedig: $F = B\mathrm{I}l$

Ha a vezeték α szöget zár be a mágneses indukcióval $\vec{B}$-vel, akkor: $F = B\mathrm{I}l\sin\alpha$

A Lorentz-erő: Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy a vezetőben folyó I áram azt jelenti, hogy N db q töltésű elektron ugyanazon v sebességgel halad az *l* hosszúságú vezetőben, (azaz ugyanazon Δt idő alatt teszi meg az *l* távolságot) ekkor $I = Nq/\Delta t$ és $v = l/\Delta t$. Ezeket az Ampere-erő képletébe beírva az N db elektronra ható erő:

$$F = B\mathrm{I}l = BNq \cdot l / \Delta t = BNqv$$

Vagyis az egy elektronra ható erő

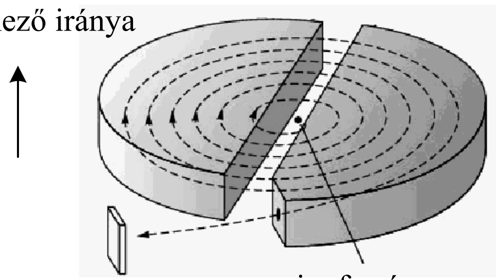
$$F = qvB$$

Általánosan egy B mágneses térben $\vec{v}$ sebességgel mozgó, q töltésű részecskére ható erő, az ún. mágneses Lorentz-erő:

$$\vec{F}=q\,\vec{v}\times\vec{B}$$

Ez az erő merőleges a sebességre és a mágneses indukcióra, $\left\{\vec{v},\vec{B},\vec{F}\right\}$ ilyen sorrendben jobbsodrású rendszert alkot. Ha elektromos tér is van jelen, a q töltésre a $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$ elektromágneses Lorentz-erő hat.
Az áram a töltéshordozók rendezett mozgása. Az áramvezetőre azért hat erő a mágneses mezőben, mert a mozgó töltéshordozókra hat erő, és mivel ezek a vezetőhöz vannak kötve, az erő átadódik a vezető testének.

A (mágneses) Lorentz-erő minden pillanatban merőleges a sebességre, ezért a sebesség nagysága nem változik, csak az iránya (vagyis a mágneses Lorentz-erő teljesítménye nulla). Például, ha $\vec{v}$ merőleges $\vec{B}$-re, a töltött részecske körpályára kényszerül, ha $\vec{v}$ nem merőleges $\vec{B}$-re, akkor a töltés csavarvonal mentén mozog. A Lorentz-erőnek fontos szerepe van akkor, amikor töltött részecskéket akarnak eltéríteni, illetve gyorsítani. A ciklotron egy olyan részecskegyorsító, amiben a Coulomb erőt használják a sebesség nagyságának növelésére és a Lorentz erőt a részecske körpályán tartására.



A ciklotron részecskegyorsító vázlata

A töltött részecskék gyorsítása a két „duáns” között történik, amelyekre váltakozó feszültséget kapcsolnak. Ennek frekvenciáját úgy számítják ki, hogy mindig gyorsítsa a részecskét, azaz amikor a részecske a duánsok között van, akkor az a duáns, amely felé éppen repül, vonzóerőt fejt ki rá. Az alkalmazott homogén mágneses mező pedig körpályára kényszeríti a részecskét, vagyis a centripetális erőt a Lorentz-erő adja:

$$QvB = m\frac{v^2}{r}$$

a körpálya sugara:

$$r = \frac{mv}{QB} \ ,$$

tehát ahogy gyorsul a részecske, úgy kerül a középponttól távolabb. A körmozgás periódusideje:

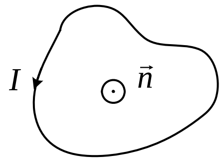
$$T = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2\pi m}{QB}$$

Vagyis a periódusidő (és ezzel a körfrekvencia) a sebességtől és a pálya sugarától független állandó. Ez azért fontos, mert így állandó frekvenciájú feszültséget lehet a duánsokra kapcsolni a gyorsításhoz. Ezt a berendezést főleg orvosi diagnosztikában használt izotóptermelésre használják, például $^{131}_{53}I$ jód izotópot állítanak elő, valamint anyagvizsgálatra, illetve magfizikai alapkutatásra.

Forgatónyomaték homogén mágneses mezőben nyugvó sík áramhurokra: Mágneses mezőben egy kicsiny sík áramhurokra forgatónyomaték hat. Belátható, hogy ez a nyomaték az áramhurok alakjától független:

$$\vec{M}_{\text{forg}} = I\vec{A} \times \vec{B}$$

$\vec{A} = A\vec{n}$ a felületvektor melynek irányítását jobb kéz szabály szerint adhatjuk meg. A kicsiny sík áramhurokban folyó áram iránya és a felületi normális iránya a jobbcsavar szabály szerint kapcsolódik össze.



A felületi normális iránya

Megállapodás szerint az itt bemutatott jelölés $\odot$ a felületből kifelé mutató vektort jelent, a felületbe befelé mutató vektort pedig a következő módon jelöljük: $\otimes$.

Az elektromos dipólusra ható forgatónyomatékot már korábban láthattuk:

$$\vec{M}_{forg} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Ennek analógiájára az áramhuroknak mágneses dipólnyomatékot vagy dipólmomentumot tulajdonítunk:

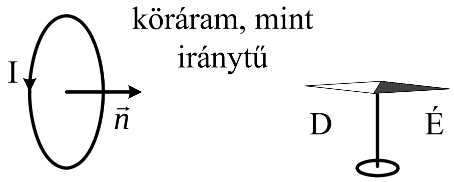
$$\vec{M}_{forg} = I\vec{A} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

ahol $\vec{m} = I\vec{A}$ az áramhurok mágneses dipólmomentuma, melynek mértékegysége: $[\vec{m}] = 1Am^2$

A permanens mágneses dipólusra (mágnestűre) ható forgatónyomaték hasonlóan:

$$\vec{M}_{forg} = \vec{m} \times \vec{B} \;, \quad \text{ahol} \quad \vec{m} \parallel \vec{l}$$

Az $\vec{m}$ mágneses dipólnyomaték abszolút értéke attól függ, milyen erősen van felmágnesezve a mágnestű. A dipólusra ható forgatónyomaték akkor szűnik meg, ha $\vec{m} \parallel \vec{B}$. A kis áramjárta hurok tehát iránytűként használható.



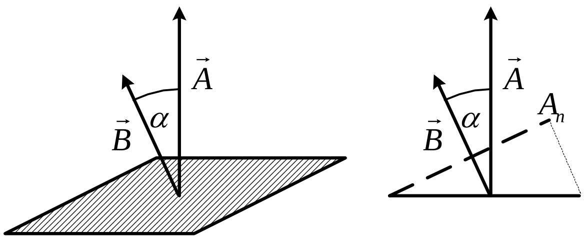
Permanens mágneses dipólus, és köráram hasonlósága

Megjegyezzük, hogy <u>inhomogén</u> mágneses mezőben az áramhurokra vagy általában a mágneses momentumra ható eredő erő általában nem nulla, hanem az inhomogenitás mértékétől (a térerősség gradiensétől) és a hurok elhelyezkedésétől függ. (Analógia: inhomogén elektromos erőtérben az elektromos dipólusra erő, homogénben csak forgatónyomaték hat.)

Mágneses indukciófluxus és Gauss-törvény: A mágneses mező szemléltetésére a mágneses indukcióvonalakat használjuk. Ezek olyan irányított görbék, amelyeknek érintő egységvektora egyirányú az érintési pontbeli mágneses indukcióvektorral. Megállapodás szerint a mágneses indukcióvonalakat olyan sűrűn vesszük fel, hogy a rájuk merőlegesen állított egységnyi felületen éppen annyi indukcióvonal haladjon át, mint amennyi ott az indukció mérőszáma.

A mágneses indukciófluxus Φ irányított felületre vonatkozik, és megadja a felületet átdöfő mágneses indukcióvonalak előjeles számát. Homogén mágneses mező esetén az A felület indukciófluxusa:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos\alpha$$



A felület mágneses mezőre merőleges vetülete

Ha a mágneses mező inhomogén, akkor egy elemi kicsiny felület fluxusa $\Delta\Phi = \vec{B} \cdot \Delta\vec{A}$, egy tetszőleges A felület indukciófluxusa pedig integrálással nyerhető:

$$\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

Mivel mágneses töltések (monopólusok) nem léteznek, így tetszőleges zárt felületre számított mágneses indukciófluxus mindig zérus. A mágneses Gauss-törvény tehát:

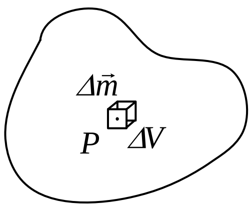
$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

A mágneses indukcióvonalaknak nincs kezdetük és nincsen végük. (A törvény differenciális/lokális alakja: $\mathrm{div}\vec{\mathrm{B}} = 0$.) A mágneses indukcióra vonatkozó határfeltétel: $B_{n2} - B_{n1} = 0$. Az elektromos indukcióvektor normális koordinátája a határfelületen azért szenvedett ugrást, mert ott elektromos töltések voltak. Mágneses töltések nincsenek, ezért a mágneses indukció normális koordinátája a két felület határán folytonos.

A mágneses polarizáció, a mágnesezettség vektora: A nukleonok (proton, neutron) mágneses dipólnyomatéka sokkal kisebb, mint az elektronoké, ezért egy atom vagy molekula mágneses dipólnyomatéka lényegében megegyezik az elektronok dipólnyomatékának összegével. Az elektronok mágneses dipólnyomatéka két részből áll:

a) mozgásból származó mágneses nyomaték, mivel a mozgó elektron kicsiny köráramnak tekinthető
b) saját mágneses nyomaték (a spinből adódik)

Az anyag mágnesezettségének jellemzésére vezessünk be egy új vektort. Legyen $\Delta\vec{m}$ a ΔV térfogatban lévő mágneses dipólnyomatékok vektori összege.



Az anyag mágnesezettségének bevezetése

Definíció szerint a mágnesezettség vektora a P pontban megadja az egységnyi térfogatra jutó mágneses nyomatékot.

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\vec{m}}{\Delta V}$$

A mágnesezettség mértékegysége: $\left[M\right] = 1\frac{Am^2}{m^3} = 1\frac{A}{m}$.

Célszerű bevezetni a mágneses térerősséget mint a $\vec{B}$ és a $\vec{M}$ vektorok lineáris kombinációját, mivel rá egyszerű alakú alaptörvény állapítható meg. A $\vec{H}$ mágneses térerősség definíció szerint:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}$$

Itt a $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am}$ univerzális állandó a vákuum permeabilitása.

A mágneses térerősség mértékegysége: $\left[H\right] = \left[M\right] = 1\frac{A}{m}$. Ezzel a permeabilitás mértékegysége: $\left[\mu_o\right] = \frac{\left[B\right]}{\left[H\right]} = \frac{1\frac{Vs}{m^2}}{1\frac{A}{m}} = 1\frac{Vs}{Am}$.

A $\vec{M}$ mágnesezettség, valamint a mágnesező tér $\vec{B}$ indukciója közötti kapcsolatot anyagegyenletnek nevezzük. Első közelítésben B és M között arányosságot feltételezünk, ilyenkor beszélünk lineáris anyagegyenletről. Ha $\vec{B} \sim \vec{M}$ akkor $\vec{H} \sim \vec{M}$. A legtöbb izotróp közegben a $\vec{H}$ és az $\vec{M}$ vektorok nemcsak egyirányúak, hanem a tapasztalat szerint egymással egyenesen arányosak is:

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

χ a mágneses szuszceptibilitás. Ezzel

$$\vec{B} = \mu_o\left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_o\left(\vec{H} + \chi\vec{H}\right) = \mu_o\left(1+\chi\right)\vec{H} = \mu_o\mu'\vec{H},$$

ahol $\mu' = 1 + \chi$ a relatív permeabilitás, $\mu = \mu_o\mu'$ pedig az abszolút permeabilitás.

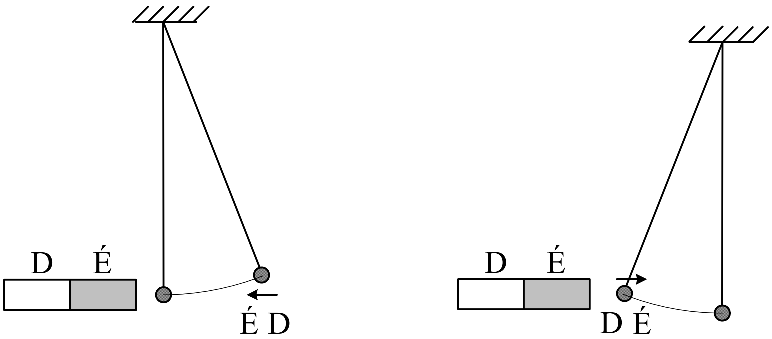
Az anyagegyenlet így: $\vec{B} = \mu_o\left(1+\chi\right)\vec{H}$, $\vec{B} = \mu_o\mu'\vec{H}$ vagy $\vec{B} = \mu\vec{H}$

Az anyagok mágneses tulajdonságai

Mai ismereteink szerint az anyagok mágneses tulajdonságaik alapján három fő típusba sorolhatóak: dia-, para-, ferromágneses típusba, de ezen felül léteznek antiferromágneses anyagok és ferritek is, emellett a szupravezetőket is külön kategóriába sorolják.

Diamágnesség: A bizmut, réz, ezüst, arany, higany, ólom, víz olyan anyagok, amelyek külső mágneses mező nélkül nem mutatnak mágneses tulajdonságokat. Mágneses mezőbe helyezve a kis bizmut-darabot, taszító hatást észlelhetünk. A bizmut polarizálódott és a mágnesező tér indukciója ellentétes irányú a mágnesezettség vektorával. Ezeknél az anyagoknál tehát $\chi < 0$, abszolút értéke általában nem több mint 10^{-4}, de ennél néhány nagyságrenddel kisebb is lehet. A relatív permeabilitás ennek megfelelően csak egy kicsit kisebb egynél: $\mu' = 1 + \chi \approx 0{,}9999...$

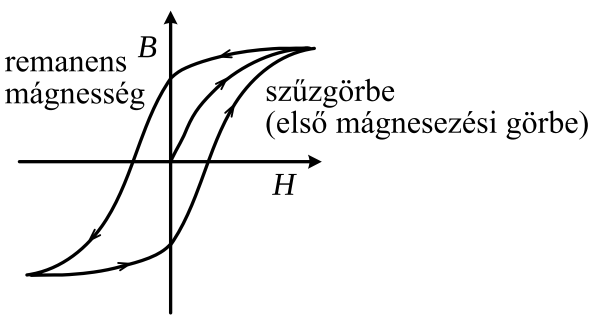
Mivel χ negatív, a közegbeli $\vec{B}$ indukció lecsökken a vákuumbeli $\vec{B}_o = \mu_o\vec{H}$ indukcióhoz képest. Ez a csökkenés nagyon kicsiny mértékű. Az ilyen anyagok atomjai külső mágneses mező nélkül nem rendelkeznek mágneses dipólnyomatékkal. Az elektronok pálya- és saját-mágneses momentumaik lerontják egymást. Külső mező hatására ez a helyzet felborul, ilyenkor az egyik elektron felgyorsul, a másik lelassul, és ezáltal az atomnak eredő mágneses dipólnyomatéka keletkezik. A jelenség a hőmérséklettől független.



Rúdmágnes és diamágneses, ill. paramágneses anyag kölcsönhatása

Paramágnesség: Paramágneses anyagok az alumínium, króm, platina, volfrám, hélium, oxigén, levegő. Külső mező híján ezek az anyagok sem mutatnak mágneses tulajdonságot. A felfüggesztett alumínium golyót az állandó mágnes vonzza. Ebben az esetben az anyag atomjainak külső mágneses mező nélkül is van eredő mágneses dipólnyomatékuk, de külső mező híján ezek rendezetlenül állnak. A mágneses mező az atomi dipólusokat a maga irányába forgatja, mégpedig annál inkább minél erősebb az alkalmazott mágneses mező, és minél alacsonyabb a hőmérséklet. Ezt a jelenséget rendeződési polarizációnak nevezzük. Ilyenkor $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{M}$, a szuszceptibilitás pozitív: $\chi \approx 10^{-3} - 10^{-6}$, vagyis a vákuumbeli indukcióhoz képest ilyenkor (kismértékben) növekszik az indukció.

Ferromágnesség: A vas, kobalt, nikkel és ezek ötvözetei erősen mágnesezhető anyagok, a mágneses mezőből kiemelve többé-kevésbé megőrzik a mágnesességüket. A ferromágneses anyagok mind szilárd anyagok és mágneses szempontból anizotropok, a $\vec{B}$, $\vec{H}$, és $\vec{M}$ vektorok nem esnek egy egyenesbe. A ferromágneses anyagot külső mágneses mezőbe helyezve, az $\vec{M}$ mágnesezettség, a $\vec{H}$ térerősség növelésével csak egy bizonyos határig nő, ekkor telítődés következik be. Az ilyen anyagok esetén a lineáris anyagegyenlet nem használható. A B és H közötti összefüggés nemcsak nem lineáris, de nem is egyértékű. Kísérletileg meghatározható a mágnesezési vagy hiszterézis görbe.



Ferromágneses anyag hiszterézis görbéje

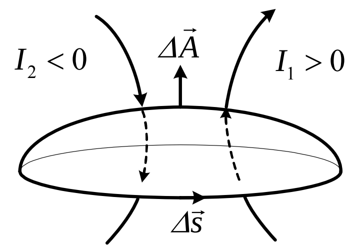
Az összetartozó B és H értékek hányadosából kiszámítható μ', vagy χ már nem állandó függ a H-tól és a minta előéletétől. A vasnál μ_r és így χ tipikusan több száz, de egyes speciális ötvözeteknél μ_r akár egymillió fölött is lehet. Az olyan anyagokat, amelyeknek számottevő a remanens, azaz visszamaradó mágnessége, permanens mágneseknek nevezzük, ilyen például az acél. Ha a ferromágneses anyag hőmérsékletét növeljük, akkor egy bizonyos T_C hőmérséklet, az úgynevezett Curie-hőmérséklet fölött a ferromágneses anyagok paramágneses anyagokká válnak. A vas Curie-hőmérséklete 769 °C, a kolbalté 1075 °C, a nikkelé 360 °C. Ha az anyagot hűtjük, a Curie-hőmérsékleten egy másodrendű fázisátalakulás játszódik le. Nincs latens hő és térfogatugrás, a szuszceptibilitás viszont divergál (a gyakorlatban ez akár 10 nagyságrendbeli változást is jelenhet)

A ferromágneses anyagoknak azt a tartományát, amelynek mágnesezettsége egyirányú, doménnek (domain) nevezzük. A domének 10^{-9}-10^{-12} cm^3 térfogatú tartományok ~10^{15} számú atommal. Egy-egy domén telítésig mágnesezett, de külső tér híján a domének mágnesezettsége rendezetlen, a szomszédos domének gyakran ellentétesen mágnesezettek, így a makroszkopikus minta össz-mágnesezettsége lényegében zérus. Ha elkezdjük növelni a külső mágneses teret, akkor azon domének térfogata kezd nőni, amelyek mágnesezettségének iránya kis szöget zár be a külső mágnesező tér irányával. Ezt a jelenséget nevezzük faleltolódásnak. Nagy mágnesező tér esetén egy másik effektus is fellép, egy-egy domén mágnesezettsége ugrásszerűen befordulhat a külső mező irányába.

Mágneses tér gerjesztése

Az Ampère-féle gerjesztési törvény: Korábban említettük, hogy mozgó töltések mágneses mezőt hoznak létre. A mérési tapasztalatok alapján felállított Ampère-féle gerjesztési törvény vékonyvonalas áramok esetén azt mondja ki, hogy a mágneses térerősség zárt görbére vett integrálja egyenlő a görbe által határolt tetszőleges felületen áthaladó áramok algebrai összegével:

$$\oint_g \vec{H} d\vec{s} = \sum_i I_i$$



A zárt görbe által körülfogott áramok előjelezése

Az áramerősségek algebrai összegénél az előjelezésre azt a szabályt használjuk, hogy az az áram, amelyik a felületet a felület normálisának irányában döfi pozitív, amelyik azzal ellentétesen döfi, az pedig negatív. Megállapodás szerint, a peremgörbe körüljárási irányát és a felületi normális irányát a jobbcsavar szabály kapcsolja össze. Az Ampère-féle gerjesztési törvény írja le az áram és az általa gerjesztett mágneses mező közötti összefüggést. A mágneses mező tehát még stacionárius esetben sem konzervatív. Tapasztalati tény, hogy a gerjesztési törvény akkor is érvényben marad, ha térben mágnesezhető anyagok vannak jelen.

Határfeltételek (peremfeltételek): Két közeg határfelületén:

$$H_{1t} = H_{2t},$$

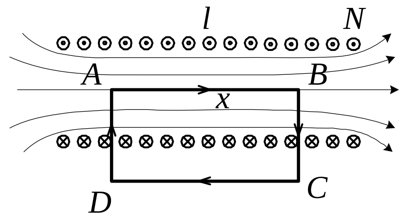
azaz a két közeg határán a mágneses térerősség tangenciális koordinátája folytonos és

$$B_{1n} = B_{2n},$$

azaz a két közeg határán a mágneses indukció normális koordinátája folytonos.

Hosszú egyenes vezető mágneses tere: Szimmetriaokokból következik, hogy a térerősség értéke csak a vezetőtől mért távolságtól függ. Az erővonalak körülfogják az áramot, tehát a vezetőre merőleges síkokban fekvő koncentrikus körök, középpontjukban a vezetővel. Ekkor, ha egy ilyen körvonal mentén integrálunk, a $\vec{H}$ nagysága állandó, iránya párhuzamos az ívelemmel, így H kihozható az integráljel elé: $\oint_g \vec{H}d\vec{s} = H\oint_g d\vec{s} = H \cdot 2r\pi = I$, azaz H=I/2rπ.

Szolenoid mágneses tere: tekintsünk egy, az átmérőjéhez képest hossz, sűrűn csévélt hengeres tekercs, mágneses terét. A mező homogénnek tekinthető a tekercs belsejében. A tekercs hosszát jelölje *l*, a menetszám legyen *N*, és legyen *A*, a keresztmetszet. Ekkor az egységnyi hosszra jutó menetek száma $\frac{N}{l}$. A tekercsben folyó áramerősség *I*. Egy alkalmasan megválasztott zárt görbére írjuk fel a gerjesztési törvényt. A zárt görbe legyen az *ABCD* téglalap, *x* az AB oldal hossza.



A szolenoid tekercs és mágneses mezeje

A zárt görbére történő összegzést felbonthatjuk négy nyílt görbére történő összegzésre:

$$\oint_g \vec{H}d\vec{s} = \int_A^B \vec{H}d\vec{s} + \int_B^C \vec{H}d\vec{s} + \int_C^D \vec{H}d\vec{s} + \int_D^A \vec{H}d\vec{s}$$

A téglalap esetében a DC szakaszon a tér közelítőleg nulla, az AD és a BC szakaszon pedig a tér iránya merőleges a görbére, így az összeg csak az AB oldalra nem tűnik el. Ebből: $Hx = \frac{N}{l}xI$, azaz

$$H = \frac{NI}{l}$$

Ezzel a mágneses indukció: $B = \mu\frac{NI}{l}$

A mágneses energia, mágneses energiasűrűség: A homogén mágneses mező energiája egy V térfogatú térrészben:

$$W_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}V$$

A mágneses mező energiasűrűsége megadja az egységnyi térfogatban található mágneses energiát:

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

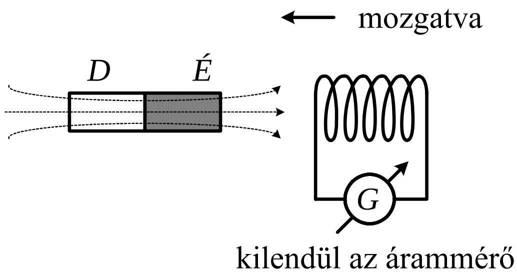
A *w* mértékegysége az elektromos esethez hasonlóan J/m^3. Ha a tér egy tetszőleges pontjában a mágneses térerősség $\vec{H}$ és a mágneses indukcióvektor $\vec{B}$, akkor a pont körül felvett kicsiny ΔV térfogatban $\Delta W = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\Delta V$ mágneses energia található. Ha a mező nem homogén, egy tetszőleges véges *V* térfogatban természetesen integrálással nyerhetjük a mágneses energiát:

$$W = \int_V w_m dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}dV$$

Az elektromágneses indukció

Azt már tudjuk, hogy ha egy mágneses mezőben lévő vezetőben áram folyik, akkor a vezetőre erő hat (Ampère-erő) és az mozgásba lendül. Kérdés, hogy ha mágneses mezőben vezetőt mozgatunk, akkor indukálódik-e áram, ill. általában hogyan tudunk mágneses úton áramot állítani elő.

Mozgási indukció: Ha egy vezetőt mágneses mezőben mozgatunk, akkor a vele együttmozgó töltéshordozókra a Lorentz-erő hat. Ezt az erőt idegen erőnek nevezzük: $\vec{F}_* = q\vec{v}\times\vec{B}$.

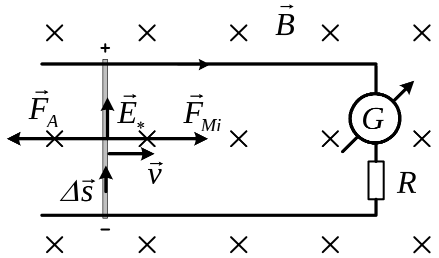


Mozgási indukció jelensége

Az idegen térerősség: $\vec{E}_* = \frac{\vec{F}_*}{q} = \vec{v}\times\vec{B}$. A mozgó vezető vonal mentén elektromotoros erő indukálódik (keletkezik), vagyis ekkor a vezető áramforrásként működik. A mozgási indukciót leíró Neumann-törvény általános alakja:

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_A^B \vec{E}_i d\vec{s} = \int_A^B \left(\vec{v}\times\vec{B}\right) d\vec{s}$$

Ha a vezetőből készített vonal zárt, akkor az indukált elektromotoros erő hatására indukált áram jön létre. Tekintsük egyenes vezetőt, és $\vec{v}, \vec{B}, \Delta\vec{s}$ legyenek egymásra merőlegesek.



Az indukált elektromotoros erő a zárt áramkörben indukált áramot eredményez

A fenti, áramforrásként viselkedő mozgó fémrudat lineáris generátornak is nevezik. Figyelembe véve a nagyon speciális geometriát, az elektromotoros erő:

$$\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{E} = \int_A^B \vec{E}_i d\vec{s} = \int_A^B \left(\vec{v}\times\vec{B}\right) d\vec{s} = vBl$$

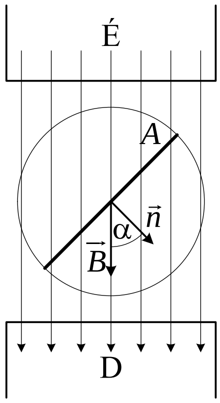
A körben folyó áram erőssége pedig az ellenállások ismeretében meghatározható. Ha az egész kör ellenállása R, akkor I=ε/R. Azonban az indukált áram miatt erre a rúdra is hat az Ampère-erő, a mozgás irányával ellentétesen (ez a Lenz-törvény megnyilvánulása), így azt egy $\vec{F}_h$ (húzó)erővel kell kompenzálnunk. Ennek az erőnek a teljesítménye fedezi a fogyasztón mért teljesítményt. A generátorok mechanikai teljesítmény árán szolgáltatnak elektromos teljesítményt.

A fenti elrendezésnél *l* a mozgó rúd konstans hossza volt, legyen a zárt hurok másik (az ábrán vízszintes) oldalának hossza h. Ekkor a hurok területe A=h*l*, a példában ez annál gyorsabban csökken, minél gyorsabban mozog a rúd jobbra. A rúd sebessége v=-dh/dt, de mivel l konstans, dA/dt=d(hl)/dt=-lv. Az indukciófluxus változási gyorsasága: $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = B\frac{dA}{dt} = -Blv = -\varepsilon$. Általánosan, ha egy irányított – nem feltétlenül merev – zárt vezetőhurok mágneses mezőben mozog, akkor a benne indukált elektromotoros erőt Faraday törvénye adja:

$$\overset{0}{\mathcal{E}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Tehát a zárt vezetőhurokban indukált elektromotoros erő egyenlő a zárt hurok által körülfogott mágneses fluxus változási gyorsaságának ellentettjével (Fluxus-szabály). A fluxus-szabály segítségével az indukált elektromotoros erő gyakran könnyebben számítható, mint a Neumann-törvénnyel.

Váltakozó áramú generátor: Tekintsünk egy téglalap alakú vezető keretet. Keresztmetszete legyen A, és forogjon állandó ω szögsebességgel homogén mágneses mezőben. A mágneses mező indukciója legyen $\vec{B}$. A kezdeti pillanatban legyen $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{B}$. Először írjuk fel a mágneses indukciófluxus időbeli változását:



Váltakozó áramú generátor

$$\Phi = \int_F \vec{B}d\vec{A} = BA\cos\alpha$$

mivel $\alpha = \omega t$, így az időben változó mágneses fluxus $\Phi = BA\cos\omega t$. Alkalmazzuk a Faraday-törvényt az indukált elektromotoros erő kiszámítására:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = BA\omega\sin\omega t\,.$$

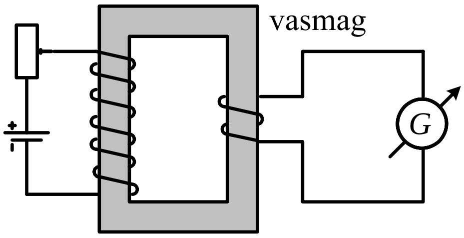
Használjuk az $\mathcal{E}_0$ jelölést az elektromotoros erő csúcsértékére $\mathcal{E}_0 = BA\omega$, ezzel

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin\omega t$$

Ha egymenetű keret helyett N menetű tekercset alkalmazunk, akkor az erővonalak mindegyik meneten átmennek, vagyis a fluxus (és annak változási gyorsasága) N-szeresére nő. Tehát a váltakozó áramú generátor elektromotoros ereje:

$$\mathcal{E} = NAB\omega\sin\omega t$$

Nyugalmi indukció: Tehát egy zárt vezetőkörben áram indukálódik, ha a mágneses indukciófluxus, azaz a $\vec{B}$ felületre vett integrálja változik. Ez az integrál nem csak úgy változhat, hogy a görbe alakja vagy helyzete, azaz az integrálási tartomány változik, hanem úgy is, hogy az integrandus, azaz a $\vec{B}$ vektor nagysága vagy iránya változik az időben (esetleg az integrálási tartománnyal együtt). Ha az integrálási tartomány nem változik, azaz nincs mozgás, $\vec{B}$ pedig változik, nyugalmi indukcióról beszélünk.

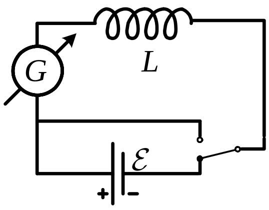


A nyugalmi indukció jelensége, kölcsönös indukció

Tekintsük a fenti elrendezést. Mindaddig, amíg a változtatható ellenállással változtatjuk az áramerősséget a primer körben, változni fog az általa gerjesztett mágneses tér indukciója. Ezeket az indukcióvonalakat a szekunder kör körülfogja, és változik a szekunder fluxus. A tapasztalat szerint, amíg a fluxust változtatjuk, a szekunder körben áram folyik. Az áram létrejöttének oka itt nem lehet a Lorentz-erő, hiszen a szekunder vezető nem mozog.

A jelenség magyarázata az, hogy az időben változó mágneses mező elektromos teret indukál, és ez az indukált elektromos mező mozdítja el a szekunder vezeték szabad elektronjait. Ez a nyugalmi indukció jelensége. A fenti kísérletben leírt konkrét jelenséget kölcsönös indukciónak nevezzük, ilyenkor a primer kör áramának változása indukál feszültséget a szekunder körben.

Tekintsük most a következő elrendezést:



A nyugalmi indukció jelensége, önindukció

A tapasztalat szerint, ha a tekercset az áramforrásról lekapcsoljuk és egyben rövidre zárjuk, akkor az árammérő egy ideig még csökkenő áramerősséget jelez. A jelenség magyarázata az, hogy az áramforrást lekapcsolva változik a mágneses mező fluxusa, ez elektromos mezőt indukál, és ez tartja fenn az áramot egy ideig. A jelenséget önindukciónak nevezzük, ilyenkor az indukált feszültséget a vezetőkör saját áramának változása okozza.

Összegezve, a Faraday-féle indukciótörvény tömör alakja:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

ahol $\Phi = \int_F \vec{B}d\vec{A}$ a mágneses indukciófluxus. Részletesebben kiírva:

$$\oint_g \vec{E}d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_F \vec{B}d\vec{A}$$

Rögzített zárt vonal mentén az indukált elektromos feszültség egyenlő a zárt vonal által körülfogott mágneses fluxus változási gyorsaságának ellentettjével. Az indukált elektromos mező nem örvénymentes, ezért nem is konzervatív.

Elektromos mezőt tehát nem csak töltések kelthetnek, hanem időben változó mágneses mező is. A töltések keltette mező forrásos, s ha a töltések nyugszanak, vagy áramlásuk stacionárius, akkor örvénymentes. Az időben változó mágneses mező keltette indukált elektromos mező forrásmentes és örvényes.

Szolenoid tekercs önindukciós együtthatója: Hosszú vékony tekercsben a mágneses térerősség és a mágneses indukció:

$$H = \frac{NI}{l}, \quad B = \mu \frac{NI}{l}$$

Írjuk fel az egyetlen menet által körülfogott fluxust (menetfluxus):

$$\Phi_m = \int_A \vec{B} d\vec{A} = \mu \frac{NA}{l} \mathrm{I}$$

A tekercsfluxus egyenlő a menetfluxusok összegével, így

$$\Phi = N\Phi_m = \mu \frac{N^2 A}{l} I$$

A tekercsfluxus arányos az őt gerjesztő árammal: $\Phi = LI$. Az arányossági tényező L az önindukciós együttható:

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

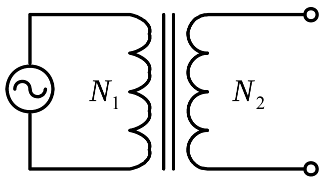
Az önindukciós együttható mértékegysége: $[\mathrm{L}] = 1\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = 1\,\mathrm{henry} = 1\mathrm{H}$

Ha egy tekercsben váltakozó áram folyik, akkor $\Phi = LI(t)$

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Sokmenetű tekercs esetén mivel L arányos N^2-tel a tekercs önindukciós együtthatója olyan nagy, hogy az egyben az egész vezető kör induktivitásának tekinthető.

Kölcsönös indukció együtthatója szoros csatolás esetén: Tekintsünk két nyugalomban lévő tekercset egymás közelében. A primer tekercs menetszáma legyen N_1, a szekunder tekercsé pedig N_2. Ha a primer tekercsben folyó áram I_1, akkor az indukció:



A kölcsönös indukció szoros csatolás esetén

$$B_1 = \mu \frac{N_1 I_1(t)}{l}$$

a menetfluxusa pedig:

$$\Phi_1 = \mu \frac{N_1 A}{l} I_1(t)$$

A szoros csatolás azt jelenti, hogy a primer tekercs menetfluxusa egyben a szekunder tekercs menetfluxusa is, így a szekunder tekercs teljes fluxusa:

$$\Phi_{12} = N_2 \Phi_1 = \mu \frac{N_1 N_2 A}{l} I_1(t)$$

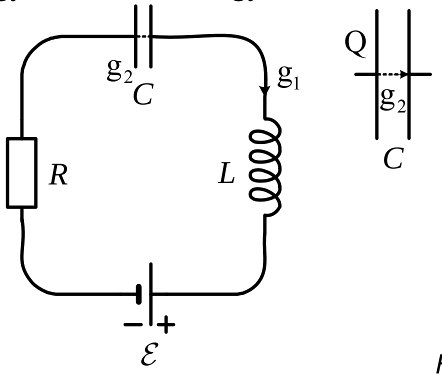
A kifejezésből kiolvasható, hogy a szekunder tekercs fluxusa arányos a primer árammal, az arányossági tényező M, a kölcsönös indukció együtthatója: $\Phi_{12} = MI_1$, ahol

$$M = L_{12} = \mu \frac{N_1 N_2 A}{l}$$

A szekunder tekercs kapcsain az indukált feszültség:

$$U_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

A hurok törvény általánosítása egyetlen hurok esetén: Tekintsük egy olyan hurkot, amely egy ellenállást, egy kondenzátort, egy tekercset, és egy áramforrást tartalmaz:



Huroktörvény általánosítása

Legyen R a teljes kör ellenállása, C a kondenzátor kapacitása, L a tekercs (és egyben az egész hurok) önindukciós együtthatója, illetve $\mathcal{E}$ az alkalmazott elektromotoros erő. Íjuk fel a nyugalmi indukció Faraday-törvényét a hurokra:

$$\oint_g \vec{E}d\vec{s} = -\frac{d\left(\int_A \vec{B}d\vec{A}\right)}{dt}$$

Mivel a tekercs önindukciós együtthatója egyben a kör indukciós együtthatója is:

$$\oint_g \vec{E}d\vec{s} = -L\frac{dI}{dt}$$

A g zárt görbét bontsuk fel két részre, g_1 haladjon a vezetőben, g_2 pedig a kondenzátor lemezei közötti szigetelőben. Amennyiben a térerősségre vonatkozó összegzést az ábra szerinti g_1, g_2, szakaszokra külön kiszámoljuk, akkor az alábbi egyenletet nyerhetjük:

$$IR - \mathcal{E} + \frac{Q}{C} = -L\frac{dI}{dt}$$

A Kirchhoff-hurokegyenlet általánosítása soros *RLC* körre:

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}$$

Tekercs rákapcsolása állandó feszültségre: Legyen a tekercs L induktivitása állandó, a kör ohmos ellenállása R, az áramforrás állandó elektromotoros ereje ε. A kapcsolót a t=0 időpillanatban zárjuk. Kérdés, hogyan változik az I áramerősség. Ha hirtelen (Δt=0 idő alatt) nulláról véges értékre nőne, akkor dI/dt és ezzel az indukált feszültség végtelen nagy lenne, ami lehetetlen. Következésképp I(0)=0. A differenciálegyenlet:

$$IR - \mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$$

Egy szétválasztható típusú, integrálva:

$$\int \frac{\mathrm{dI}}{\varepsilon - \mathrm{RI}} = \frac{1}{\mathrm{L}}\int \mathrm{dt}$$

Az integrálást elvégezve:

$$\ln\frac{\varepsilon - RI}{K} = -\frac{R}{L}t$$

A kezdeti feltételből ln ε/K=0 azaz K= ε, tehát

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = I_\infty\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Felhasználtuk, hogy t=∞-re I_∞= ε/R-nek adódik. Vezessük be a τ=L/R mennyiséget, amelyet időállandónak vagy a kör relaxációs idejének is neveznek. Ezzel az áramerősség:

$$I(t) = I_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Az áramerősség tehát exponenciálisan tart a maximális I_∞ értékhez. Ha a tekercset hirtelen lekapcsoljuk az állandó feszültségről, ennek a fordítottja játszódik le, az áram exponenciális függvény szerint tart a nullához.

Kondenzátor kisütése: Egy Q töltésre, azaz $U_0=Q_0/C$ feszültségre feltöltött kondenzátort R ellenálláson keresztül kisütünk. A differenciálegyenlet:

$$IR + \frac{Q}{C} = 0\text{, ahol } I = \frac{dQ}{dt}$$

Idő szerint deriválva és átrendezve: $\frac{dI}{dt} = \frac{-1}{RC}I$, ez is szétválasztható: $\int\frac{dI}{I} = \frac{-1}{RC}\int dt$. A megoldás: $\ln I = \frac{-1}{RC}t + K$, azaz mivel $K=\ln I_0$, $I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-t/\tau}$, ahol τ=RC az RC kör időállandója. Ez azt az időt adja meg, amely alatt *e*-adrészére csökken az áramerősség.

Kondenzátor szinuszos váltakozó feszültségen: Egyenáramot a kondenzátor nem vezeti, de váltakozó feszültség hatására periodikusan feltöltődik és kisül. Így a váltakozó áram folytonosan folyik a körben anélkül, hogy a lemezek közötti szigetelőrétekben töltések áramlanának. Az általános Kirchhoff-hurokegyenletből kapjuk, hogy a kondenzátor U=Q/C feszültsége az áramforrás ε elektromotoros erejével egyenlő. Mivel $\varepsilon(t)= \varepsilon_o\sin\omega t$,

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(CU_0 \sin\omega t\right) = CU_0\omega\cos\omega t\,.$$

Tehát az áramerősség az időnek koszinuszos függvénye, az áramerősség és a feszültség között π/2 fáziskülönbség van, vagyis az áramerősség 90^o-kal siet a feszültséghez képest. Ez azért lehetséges, mert nem a kondenzátor lemezei között lévő feszültségkülönbség az oka a töltések áramlásának, hanem ennek a feszültségnek a *megváltozása*. A feszültség csúcsértéke U_0, az áramerősségé $CU_0\omega$, a kettő hányadosaként értelmezhetjük a kondenzátor váltóáramú ellenállását, más néven kapacitív ellenállását vagy kapacitanciáját:

$$X_C = \frac{1}{\omega C},$$

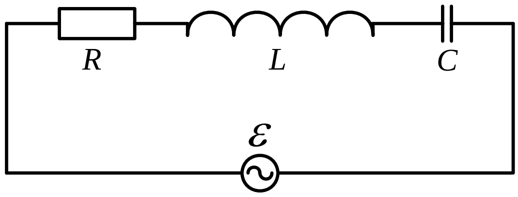
Ez, mint látható, függ a frekvenciától és egyenáramra végtelenné válik.

Ideális tekercs szinuszos váltakozó feszültségen: Ha minden ohmos ellenállást elhanyagolunk, a megoldandó egyenlet: $\mathcal{E} = L\frac{dI}{dt}$, ahol $\varepsilon(t)= \varepsilon_o\sin\omega t$. Idő szerint integrálva kapjuk, hogy $-\varepsilon_0\cos\omega t/\omega = LI$, azaz $I(t) = -\frac{\varepsilon_0}{L\omega}\cos\omega t$, vagyis az induktivitáson az áram 90^o-ot késik a feszültséghez képest. A feszültség és az áramerősség csúcsértékének hányadosa a tekercs váltóáramú ellenállása, más néven induktív ellenállása vagy induktanciája:

$$X_L = L\omega$$

Egyenáramra ez nulla, a frekvencia növelésével növekszik.

Soros RLC-kör gerjesztett elektromágneses rezgései



Soros RLC kör

Tekintsük a fenti soros RLC kört, és alkalmazzuk rá az általánosított hurok törvényt:

$$L\frac{dI}{dt}+IR+\frac{Q}{C}=\mathcal{E}$$

Az áramkörben alkalmazzunk egy váltakozó áramú generátort, aminek az elektromotoros ereje $\mathcal{E}=\mathcal{E}_0\cos\omega t$ függvény szerint változik. $\mathcal{E}_0$ a gerjesztő elektromotoros erő amplitúdója ω pedig a körfrekvenciája. A Kirchhoff-féle huroktörvény formálisan teljesen analóg a gerjesztett rezgés mozgásegyenletével. Az analóg mennyiségek:

$m \to L$ tehetetlenség

$x \to Q$ a változó

$\kappa \to R$ csillapítás

$D \to \frac{1}{C}$ a rugó, ill. a kondenzátor tárolja az energiát, ami a megnyúlásból, ill. a töltés-felhalmozódásból adódik

$F_0 \to \mathcal{E}_0$ kényszer, energiabetáplálás

$\omega_0=\sqrt{\frac{D}{m}} \to \frac{1}{\sqrt{LC}}$ körfrekvencia

A fenti egyenlet egy differenciálegyenlet a kondenzátor fegyverzetein lévő töltés időfüggésére. Ennek megoldását itt nem részletezzük, csak felírjuk az időben állandósult állapot alakját. Bár az egyenlet a töltésre vonatkozik, mi rögtön az ebből származtatható áramerősség időfüggését írjuk fel:

$$I=I_0\cos(\omega t-\varphi)$$

Az áramerősség időfüggésében szereplő I_0 a létrejövő áram csúcsértéke, míg φ a kezdőfázis. Az áramerősség csúcsértékét a soros váltakozó áramú körökre vonatkozó Ohm törvény alapján határozhatjuk meg:

$$I_0=\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

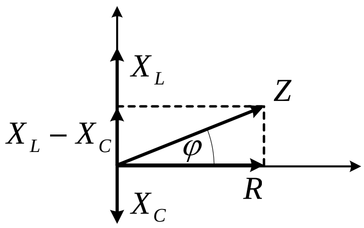
vagy:

$$I_0=\frac{\mathcal{E}_0}{Z}$$

ahol *Z* a soros kör impedanciája:

$$Z=\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

A korábban bevezetett jelölésekkel felrajzoljuk az impedancia vektorábrát.



Impedancia vektorábra

Ebből leolvasható a kezdőfázis:

$$tg\varphi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

vagy

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

Ha $\varphi > 0$ akkor I késik $\mathcal{E}$ -hoz képest, ha $\varphi < 0$ akkor I siet $\mathcal{E}$ -hoz képest.

Az egyes kapcsolási elemek pólusain mérhető feszültségek: Grafikusan a feszültségeket úgy kaphatjuk meg, hogy az impedancia vektorábrán minden ellenállás-jelegű mennyiséget beszorzunk az áramerősséggel. Az ohmos ellenálláson lévő feszültség az áramerősséggel mindig fázisban van. Ha $U_{\mathrm{R0}} = I_0 R$ az ellenálláson a feszültség csúcsértéke, akkor

$$U_{\mathrm{R}}(t) = U_{\mathrm{R0}} \cos(\omega t - \varphi)$$

A kondenzátor feszültsége π/2-vel késik az áramhoz képest, azaz

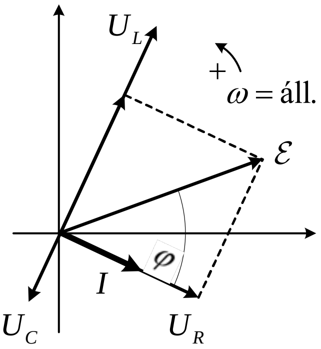
$$U_{\mathrm{C}}(t) = U_{\mathrm{C0}} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

ahol $U_{\mathrm{C0}} = I_0 X_C$, a kondenzátoron mérhető feszültség csúcsértéke.
Az ideális tekercs feszültsége π/2-vel siet az áramerősséghez képest:

$$U_{\mathrm{L}}(t) = U_{\mathrm{L0}} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

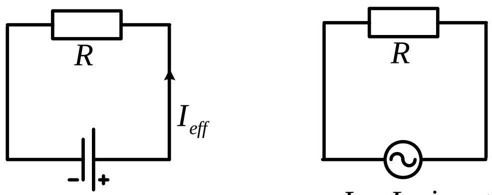
ahol $U_{\mathrm{L0}} = I_0 X_L$ az induktivitáson mérhető feszültség csúcsértéke.

Forgó vektorábra: A soros RLC kör fázisviszonyainak szemléltetésére gyakran használják a forgó vektoros ábrázolást. Ilyenkor a vektor hossza arányos az illető fizikai mennyiség csúcsértékével, és állandó szögsebességgel forog a síkban. A vízszintes tengelyre vett vetület harmonikus rezgést végez, ez adja a fizikai mennyiség pillanatnyi értékét. Az első vektor, amit egy ilyen ábrázolásnál felveszünk, az áramerősség vektora. Mivel az ohmos ellenálláson lévő feszültség az áramerősséggel mindig fázisban van, így az azt leíró vektor az áramerősséggel párhuzamos. Az ideális tekercs feszültsége $\frac{\pi}{2}$-vel siet az áramerősséghez képest, így az ezt ábrázoló vektor, a vektorok forgásának irányában megelőzi az áramerősség vektorát. A kondenzátor feszültsége $\frac{\pi}{2}$-vel késik az áramhoz képest, így a vektora az áramerősség vektorához képest $\frac{\pi}{2}$-vel lemarad. A vektorok összege pedig kiadja a generátor elektromotoros erejét. Megjelenik az ábrán a fáziskülönbség is.



Forgó vektorábra

Váltakozó áram jellemzése effektív értékekkel: A váltakozó áram effektív értéke a hőhatás szempontjából egyenértékű stacionárius áram erősségét jelenti. Akár a vizsgált váltakozó áram folyik át egy fogyasztón (jobb oldali ábra), akár egy I_{eff} erősségű stacionárius áram (bal oldali ábra), egy periódus alatt az elektromos munkavégzés megegyezik.



Egyszerű áramkörök az effektív áramerősség bevezetéséhez

$$W = I_{eff}^2 RT \qquad\qquad W = \int_0^T I^2(t) R dt$$

A szinusznégyzet-függvényt kiintegrálva belátható, hogy az effektív érték: $I_{eff} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$.

Hasonlóan a generátor effektív feszültsége: $\mathcal{E}_{eff} = \dfrac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$.

Teljesítmény soros váltakozó áramú körben: A soros áramkör esetén az áramforrás pillanatnyi teljesítménye:

$$P(t) = \mathcal{E}(t) I(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \; I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Két ismert trigonometrikus azonosságot ($\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ és $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$) összeadva: $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \cos\beta$

Legyen $\alpha = \omega t$ és $\beta = \omega t - \varphi$, ekkor:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi\right] = \cos\omega t \cos(\omega t - \varphi) \; ,$$

így a pillanatnyi teljesítmény:

$$P(t) = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2}\left[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi\right]$$

Ha ennek a függvénynek képezzük az időátlagát, akkor mivel a koszinuszos függvény időátlaga zérus, csak a jobboldali tag marad, mivel az konstans. Az átlagteljesítmény a csúcsértékekkel, vagy az effektív értékekkel kifejezve:

$$\overline{P} = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2}\cos\varphi = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_0}{\sqrt{2}}\cos\varphi = \mathcal{E}_{eff} I_{eff} \cos\varphi = \frac{\mathcal{E}_{eff}^2 R}{Z^2} = I_{eff}^2 R$$

Az Ampère-Maxwell-féle gerjesztési törvény: Faraday indukció törvénye szerint az időben változó mágneses mező elektromos mezőt kelt. Maxwell elméleti megfontolások alapján feltételezte, hogy az elektromos mező időbeli változása pedig örvényes mágneses mezőt kelt. Az egyenlet felírása során az Ampère-féle gerjesztési törvény kiegészítette egy további taggal, amelyet eltolási áramnak nevezett. Így született meg az Ampère-Maxwell törvény:

$$\oint_g \vec{H}\cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d}{dt}\int_F \vec{D}d\vec{A}$$

Felhasználva az elektromos indukciófluxust, az Ampère-Maxwell törvény rövidebben:

$$\oint_g \vec{H}\cdot d\vec{s} = \sum \mathrm{I} + \frac{d\Psi}{dt}.$$

A mágneses térerősség zárt görbére vett integrálja egyenlő a vonalra feszített felületet átdöfő áramok erősségének, és a felületen átmenő elektromos fluxus változási gyorsaságának az összegével. Mágneses mezőt tehát nemcsak mágneses dipólusok, vagy áramok gerjeszthetnek, időben változó elektromos mező is képes mágneses mezőt kelteni. A jelenség szimmetrikus megfelelője a Faraday-féle indukciónak. Az eltolási áram, nem áram a szó eredeti értelmében, mert nem mindig kapcsolódik hozzá töltések mozgása. Azonban éppúgy gerjeszt mágneses mezőt, mint a vezetési áram. Jó vezetőben $\left(\gamma \cong 10^7 1/\Omega m\right)$, technikai váltóáram esetén a vezetési áramsűrűség sok nagyságrenddel felülmúlja az eltolási áramsűrűséget. Nem hanyagolható el az eltolási áram szigetelőben, ahol nem folyhat vezetési áram, illetve ha a frekvencia az optikai tartományba esik.

A Maxwell-egyenletrendszer: A XIX. sz. egyik legnagyobb hatású egyenletrendszere, főleg azért, mert ebből az egyenletrendszerből vezették le az elektromágneses hullámok létezését.

1. Ampère-Maxwell féle gerjesztési törvény:

$$\oint_g \vec{H}\cdot d\vec{s} = \sum_i I_i + \frac{d}{dt}\int_F \vec{D}d\vec{A} \quad \text{és} \quad \mathrm{rot}\vec{\mathrm{H}} = \vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial\vec{\mathrm{D}}}{\partial \mathrm{t}}$$

2. Faraday-féle indukció-törvény:

$$\oint_g \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_F \vec{B}d\vec{A} \quad \text{és} \quad \mathrm{rot}\vec{\mathrm{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{t}}$$

3. Elektromos Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{D}d\vec{A} = Q \quad \text{és} \quad \mathrm{div}\vec{\mathrm{D}} = \rho$$

4. Mágneses Gauss-törvény:

$$\oint_F \vec{B}d\vec{A} = 0 \quad \text{és} \quad \mathrm{div}\vec{\mathrm{B}} = 0$$

A Maxwell-egyenletrendszer megoldásához szükségesek az anyagegyenletek is, amelyek megadják, hogy mi a kapcsolat egyfelől az elektromos térerősség és az elektromos indukció, másfelől a mágneses térerősség és a mágneses indukció között. A lineáris anyagegyenletek: $\vec{\mathrm{D}} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{\mathrm{E}}$ és $\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$, valamint az Ohm-törvény: $\vec{j} = \gamma\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} + \vec{E}_i\right)$. Míg azonban a Maxwell-egyenletek egzakt természettörvények, az anyagegyenletek csak bizonyos anyagokra igazak, és közelítő jellegűek.