Runge-Kutta módszerek

A Runge-Kutta módszerek az Euler módszer továbbfejlesztésének, javításának tekinthetők, $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$ kezdeti értékkel definiált differenciál egyenletek megoldására. Előnye hogy a megoldás során nem kell magasabb rendű differenciálokat számolnia.
A Runge-Kutta módszer explicit megoldásának általános alakja az *s* lépésben:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$

$$k_i = f\left(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right)$$

Ahol $a_{ij} = 0$, $j \geq i$ és
$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i$$
Egy másodrendű klasszikus Runge-Kutta módszer Butcher táblázata:

$$\begin{array}{c|c|c}
0 & 0 & . \\
\hline
c_2 & c_2 & 0 \\
\hline
. & b_1 & b_2
\end{array}$$

ahol a diagram együtthatói kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$b_1 + b_2 = 1$$
$$b_2 c_2 = \frac{1}{2}$$

Ezért, végtelen sok fajtája van a másodrendű Runge-Kutta módszereknek. A leggyakrabban használt módszerek:

a) Euler módosított módszere, amelyben

$$b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2}$$

A képlete

$$y_{n+1} = y_n + h\,k_2$$

ahol

$$k_1 = f(t_n,\ y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h\,k_1}{2}\right).$$

A következőkben két **Mathematica** eljárást, az **eulermod** és az **eulermodgraf** eljárásokat fogjuk bemutatni. Ezek segítségével kiszámolható a közzelitő megoldások értéktáblázata és ábrázolhatóak is a megoldások a módosított Euler módszerrel.

```
eulermod [f_,  h_,  ini_, a_, b_] :=
Module [ {yrk, t, y, rktable1, c},
 c = (b - a) / h;
 yrk[0] = ini;
 t[n_] := a + n h;
 yrk[n_] :=
  Module[{k1, k2},
   k1 = f[t[n - 1], yrk[n - 1]];
                      h                   h
   k2 = f[t[n - 1] + -, yrk[n - 1] + - k1];
                      2                   2
   yrk[n] = yrk[n - 1]  + h k2];
 rktable1 = Table[yrk[i], {i, 0, c}];
Table[{t[i], rktable1[[i + 1]]}, {i, 0, c}] // TableForm]
```

```
                                                                           b - a
eulermodgraf[f_, h_, ini_, a_, b_] := Module[{yrk, t, y, rktable1, c}, c = -----;
                                                                             h
  yrk[0] = ini; t[n_] := a + n h; yrk[n_] := Module[{k1, k2}, k1 = f[t[n - 1], yrk[n - 1]];
                   h                h k1
    k2 = f[t[n - 1] + -, yrk[n - 1] + ----]; yrk[n] = yrk[n - 1] + h k2];
                   2                 2
  rktable1 = Table[yrk[i], {i, 0, c}]; ListPlot[Table[{t[i], rktable1[[i + 1]]}, {i, 0, c}],
   Joined → True, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0]}, PlotRange → All];
  Print["y[", t[c], "]=", rktable1[[c + 1]]]]
```

ahol **f** a megoldásfüggvényhez rendelt függvény, **h** a lépésköz, **ini** a kezdeti érték, valamint **a** és **b** az intervallum végpontjai.

b) Javított Euler módszer, amelynél

$b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{2}, c_2 = 1$

A képlete:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h\,(k_1+k_2)}{2}$$

ahol

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + h, y_n + h\,k_1).$$

A módszerhez tartozó két **Mathematica** eljárás, a **mejoreuler** és a **mejoreulergraf**. Ezek az eljárások szolgáltatják a javított Euler módszer megoldásának értéktáblázatát és grafikonját.

```
mejoreuler [f_, h_, ini_, a_, b_] :=
Module [ {yrk, t, y, rktable1, c},
 c = (b - a) / h;
 yrk[0] = ini;
 t[n_] := a + n h;
 yrk[n_] :=
  Module[{k1, k2},
   k1 = f[t[n - 1], yrk[n - 1]];
   k2 = f[t[n - 1] + h, yrk[n - 1] + h k1];
   yrk[n] = yrk[n - 1] + (h / 2) (k1 + k2)];
 rktable1 = Table[yrk[i], {i, 0, c}];
Table[{t[i], rktable1[[i + 1]]}, {i, 0, c}] // TableForm]
```

```
mejoreulergraf[f_, h_, ini_, a_, b_] := Module[{yrk, t, y, rktable1, c}, c = (b - a)/h;
  yrk[0] = ini; t[n_] := a + n h; yrk[n_] := Module[{k1, k2}, k1 = f[t[n - 1], yrk[n - 1]];
    k2 = f[t[n - 1] + h, yrk[n - 1] + h k1]; yrk[n] = yrk[n - 1] + 1/2 h (k1 + k2)];
  rktable1 = Table[yrk[i], {i, 0, c}]; ListPlot[Table[{t[i], rktable1[[i + 1]]}, {i, 0, c}],
   Joined → True, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0]}, PlotRange → All];
  Print["y[", t[c], "]=", rktable1[[c + 1]]]]
```

ahol **f** a megoldásfüggvényhez rendelt függvény, **h** a lépésköz, **ini** a kezdeti érték, valamint **a** és **b** az intervallum végpontjai.

Mindkét módszer használatával megoldjuk az

$y' = -t\,y + \frac{4\,t}{y},\ y(0)=1$

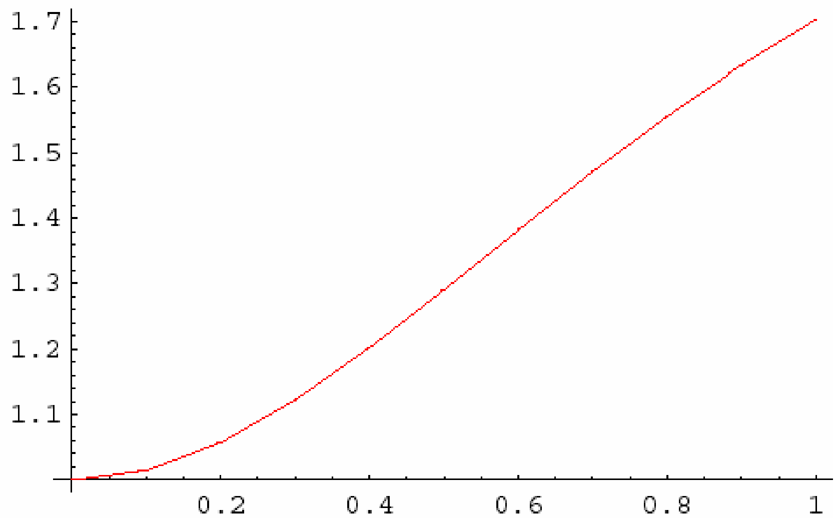
kezdeti érték problémával definiált differenciál egyenletet a [0,1] intervallumon, 0.1-es lépésközzel.

$$f[t\_, y\_] = -t\,y + \frac{4\,t}{y};$$

```
eulermod[f, 0.1, 1, 0, 1]
```

0	1
0.1	1.015
0.2	1.05783
0.3	1.12286
0.4	1.20303
0.5	1.29151
0.6	1.38258
0.7	1.47185
0.8	1.55615
0.9	1.63337
1.	1.70225

```
eulermodgraf[f, 0.1, 1, 0, 1]
```

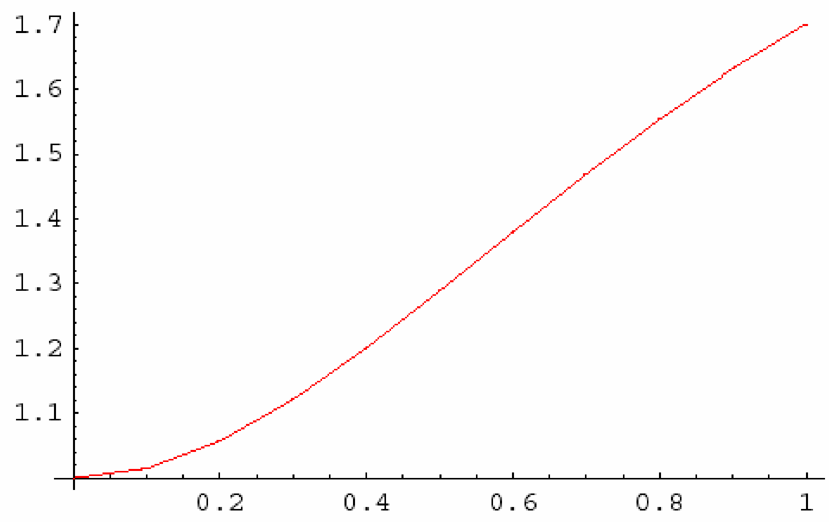


```
y[1.]=1.70225
```

```
mejoreuler[f, 0.1, 1, 0, 1]
```

0	1
0.1	1.015
0.2	1.05749
0.3	1.12202
0.4	1.20169
0.5	1.28977
0.6	1.38058
0.7	1.46972
0.8	1.55398
0.9	1.63123
1.	1.70021

```
mejoreulergraf[f, 0.1, 1, 0, 1]
```




```
y[1.]=1.70021
```

Az előző fejezetben láthattuk, hogy ennek a differenciál egyenletnek az adott kezdeti értéket kielégítő megoldása, $t=1$-re, 1.70187 volt.
Ezért kijelenthetjük, hogy az első Runge-Kutta módszer megoldás változata sokkal közelebb áll az egzakt megoldáshoz, mint a második.

A harmadrendű klasszikus Runge-Kutta módszerhez tartozó Butcher táblázat:

0	0	.	.
c_2	c_2	0	.
c_3	$c_3 - a_{32}$	a_{32}	0
.	b_1	b_2	b_3

ahol a diagram együtthatói kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$
$$b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2}$$
$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3}$$
$$b_3 c_2 a_{32} = \frac{1}{6}$$

Az egyenletrendszer túl határozott, ezért végtelen sok harmadrendű Runge-Kutta módszer létezik, melyek közül a leggyakrabban használt:

0	0	.	.
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	.
1	-1	2	0
.	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

képlete pedig:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h\,(k_1 + 4\,k_2 + k_3)}{6}$$

ahol

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h\,k_1}{2}\right)$$

Ehhez a M**athematica** két újjabb eljárása, a **Runge3** és a **Runge3graf** használható, melyek segítségével megkapható a megoldás értéktáblázata és grafikonja.

```
Runge3 [f_, h_, ini_, a_, b_] :=
Module [ {yrk3, t, rktable3, c },
 c = (b - a) / h;
 yrk3[0] = ini;
 t[n_] := a + n h;
 yrk3[n_] :=
  Module[{k1, k2, k3},
   k1 = f[t[n - 1], yrk3[n - 1]];
   k2 = f[t[n - 1] + h / 2, yrk3[n - 1] + (h / 2) k1];
   k3 = f[t[n - 1] + h, yrk3[n - 1] - h k1 + 2 h k2];
  yrk3[n] = yrk3[n - 1] + h ((1 / 6) k1 + (2 / 3) k2 + (1 / 6) k3)];
 rktable3 = Table[yrk3[i], {i, 0, c}];
Table[{t[i], rktable3[[i + 1]]}, {i, 0, c}] // TableForm]
```

```
Runge3graf[f_, h_, ini_, a_, b_] :=
 Module[{yrk3, t, rktable3, c}, c = (b - a)/h; yrk3[0] = ini; t[n_] := a + n h; yrk3[n_] :=
   Module[{k1, k2, k3}, k1 = f[t[n - 1], yrk3[n - 1]]; k2 = f[t[n - 1] + h/2, yrk3[n - 1] + (h k1)/2];
    k3 = f[t[n - 1] + h, yrk3[n - 1] - h k1 + 2 h k2]; yrk3[n] = yrk3[n - 1] + h (k1/6 + (2 k2)/3 + k3/6)];
  rktable3 = Table[yrk3[i], {i, 0, c}]; ListPlot[Table[{t[i], rktable3[[i + 1]]}, {i, 0, c}],
   Joined -> True, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}, PlotRange -> All];
  Print["y[", t[c], "]=", rktable3[[c + 1]]]]
```

ahol **f** a megoldásfüggvényhez rendelt függvény, **h** a lépésköz, **ini** a kezdeti érték, valamint **a** és **b** az intervallum végpontjai.

Ezen módszer használatával oldjuk meg az

$y' = -t\,y + \frac{4t}{y}$, $y(0)=1$

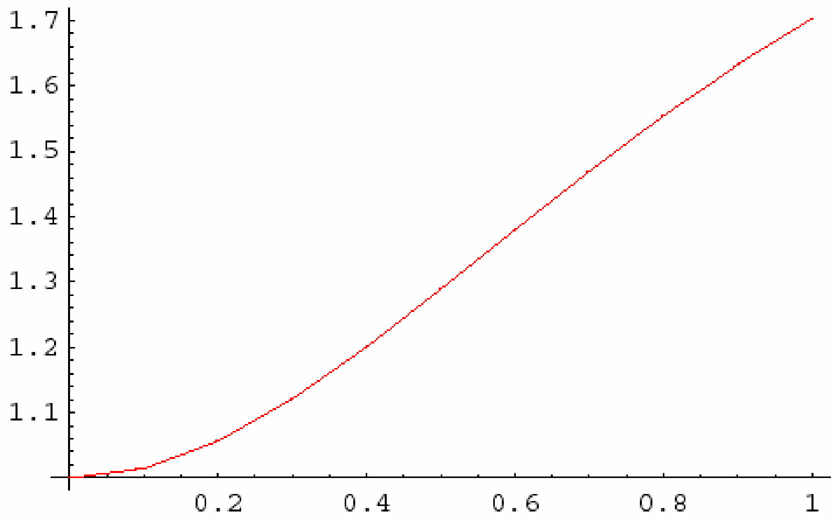
kezdeti érték problémával definiált differenciál egyenletet a [0,1] intervallumon, 0.1-es lépésközzel.

```
f[t_, y_] = -t y + 4 t / y;
```

```
Runge3[f, 0.1, 1, 0, 1]
```

0	1
0.1	1.01476
0.2	1.05708
0.3	1.12157
0.4	1.20135
0.5	1.28967
0.6	1.38082
0.7	1.47033
0.8	1.55497
0.9	1.63259
1.	1.70187

```
Runge3graf[f, 0.1, 1, 0, 1]
```




```
y[1.]=1.70187
```

A leggyakrabban használt negyedrendű Runge-Kutta módszerhez tartozó Butcher táblázat:

0	0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Képlete pedig

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = f(t_n, y_n)$$

$$K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2\right)$$

$$K_4 = f(t_n + h, y_n + h K_3)$$

Ehhez két újabb M**athematica** eljárás, a **Runge4** és a **Runge4graf** használható, melyek segítségével megkapható a megoldás értéktáblázata és grafikonja.

```
Runge4 [f_, h_, ini_, a_, b_] :=
Module [ {yrk4, t, rktable4, c },
 c = (b - a) / h;
 yrk4[0] = ini;
 t[n_] := a + n h;
 yrk4[n_] :=
  Module[{k1, k2, k3, k4 },
   k1 = f[t[n - 1], yrk4[n - 1]];
   k2 = f[t[n - 1] + h / 2, yrk4[n - 1] + (h / 2) k1];
   k3 = f[t[n - 1] + h / 2, yrk4[n - 1] + (h / 2) k2];
   k4 = f[t[n - 1] + h, yrk4[n - 1] + h k3];
   yrk4[n] =
    yrk4[n - 1] +
     (h / 6) (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4)];
 rktable4 = Table[yrk4[i], {i, 0, c}];
Table[{t[i], rktable4[[i + 1]]}, {i, 0, c}] // TableForm]
```

```
Runge4graf[f_, h_, ini_, a_, b_] := Module[{yrk4, t, rktable4, c}, c = (b - a)/h; yrk4[0] = ini;
  t[n_] := a + n h; yrk4[n_] := Module[{k1, k2, k3, k4}, k1 = f[t[n - 1], yrk4[n - 1]];
    k2 = f[t[n - 1] + h/2, yrk4[n - 1] + (h k1)/2]; k3 = f[t[n - 1] + h/2, yrk4[n - 1] + (h k2)/2];
    k4 = f[t[n - 1] + h, yrk4[n - 1] + h k3]; yrk4[n] = yrk4[n - 1] + 1/6 h (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4)];
  rktable4 = Table[yrk4[i], {i, 0, c}]; ListPlot[Table[{t[i], rktable4[[i + 1]]}, {i, 0, c}],
   Joined → True, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0]}, PlotRange → All];
  Print["y[", t[c], "]=", rktable4[[c + 1]]]]
```

ahol **f** a megoldásfüggvényhez rendelt függvény, **h** a lépésköz, **ini** a kezdeti érték, valamint **a** és **b** az intervallum végpontjai.

Ezen módszer használatával oldjuk meg az

$y' = -t\,y + \frac{4\,t}{y},\ y(0)=1$

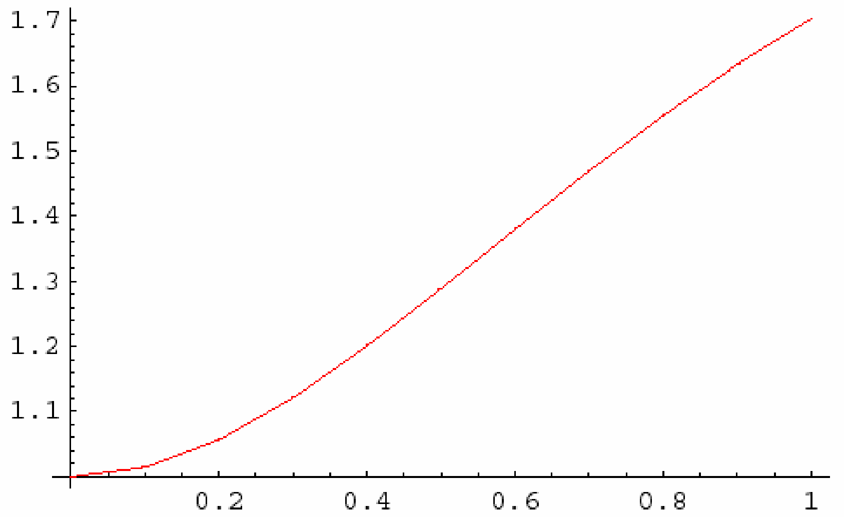
kezdeti érték problémával definiált differenciál egyenletet a [0,1] intervallumon, 0.1-es lépésközzel.

```
f[t_, y_] = -t y + (4 t)/y;
```

```
Runge4[f, 0.1, 1, 0, 1]
```

0	1
0.1	1.01482
0.2	1.05718
0.3	1.1217
0.4	1.20149
0.5	1.28981
0.6	1.38093
0.7	1.47042
0.8	1.55503
0.9	1.63261
1.	1.70187

```
Runge4graf[f, 0.1, 1, 0, 1]
```




```
y[1.]=1.70187
```

Példa 1.

A negye rendű Runge-Kutta módszer használatával oldjuk meg az

$$y' = \frac{y^2-3t^2-2ty}{t^2+2ty},\ y(1)=2$$

kezdeti érték problémával definiált differenciál egyenletet, az [1,2] intervallumon, 0.1-es lépésközzel.

Megoldás:

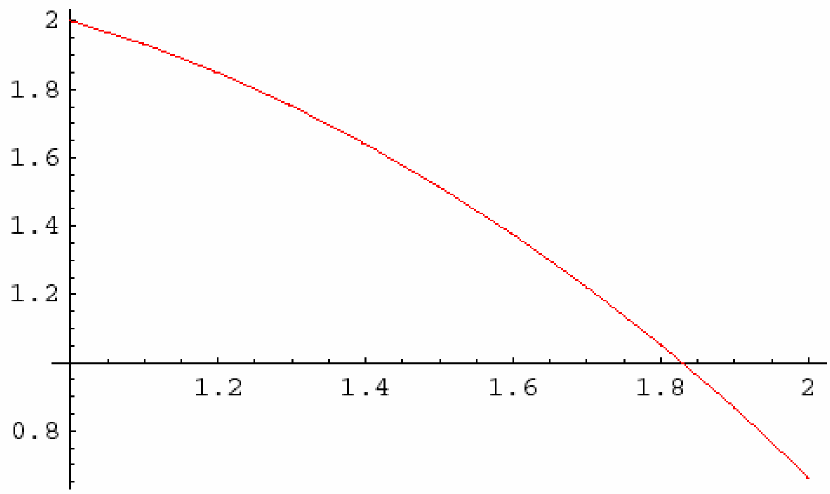
A kezdeti érték problémával megadott differenciál egyenlethez rendelt függvényt adjuk meg és alkalmazzuk a numerikus módszert:

$$f[t\_, y\_] := \frac{y^2 - 3\,t^2 - 2\,t\,y}{t^2 + 2\,t\,y}$$

```
Runge4[f, 0.1, 2, 1, 2]
```

1	2
1.1	1.93191
1.2	1.84842
1.3	1.75041
1.4	1.63842
1.5	1.5127
1.6	1.37319
1.7	1.21949
1.8	1.05082
1.9	0.865842
2.	0.662386

```
Runge4graf[f, 0.1, 2, 1, 2]
```




```
y[2.]=0.662386
```

Példa 2.

Határozzuk meg a t=3 pontban az

$$y' = \sqrt{y} - \frac{20\, e^{-100(t-2)^2}}{\sqrt{\pi}}, \quad y(1) = 1$$

kezdeti érték problémával adott differenciál egyenlet negyedrendű Runge-Kutta megoldásának értékét, ehhez használjuk a Runge4 eljárást, h= 0.01 lépésköz használatával. Hasonlítsuk össze ennek grafikonját az

$$y' = \sqrt{y}\,,\quad y(1) = 1$$

Kezdeti érték problémával adott differenciál egyenlet megoldásának grafikonjával.

Megoldás

Fontos észrevenni, hogy a **Mathematica** nem tudja megoldani ezt a differenciál egyenletet:

$$\texttt{DSolve}\left[\left\{y'[t] == \sqrt{y[t]} - \frac{20\, e^{-100\,(t-2)^2}}{\sqrt{\pi}},\ y[1] == 1\right\},\ y[t],\ t\right]$$

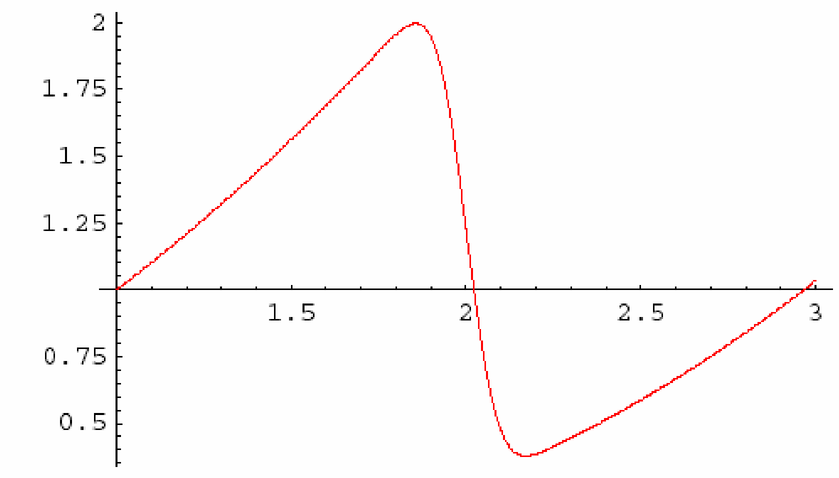
```
Solve::ifun :
 Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found;
   use Reduce for complete solution information. More...
```

$$\texttt{DSolve}\left[\left\{y'[t] == -\frac{20\, e^{-100\,(-2+t)^2}}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{y[t]},\ y[1] == 1\right\},\ y[t],\ t\right]$$

A kezdeti érték problémával adott differenciál egyenlethez rendelt függvény adott, alkalmazzuk a numerikus módszert:

$$\texttt{f[t\_, y\_]} := \sqrt{y} - \frac{20\, e^{-100\,(t-2)^2}}{\sqrt{\pi}}$$

```
Runge4graf[f, 0.01, 1, 1, 3]
```

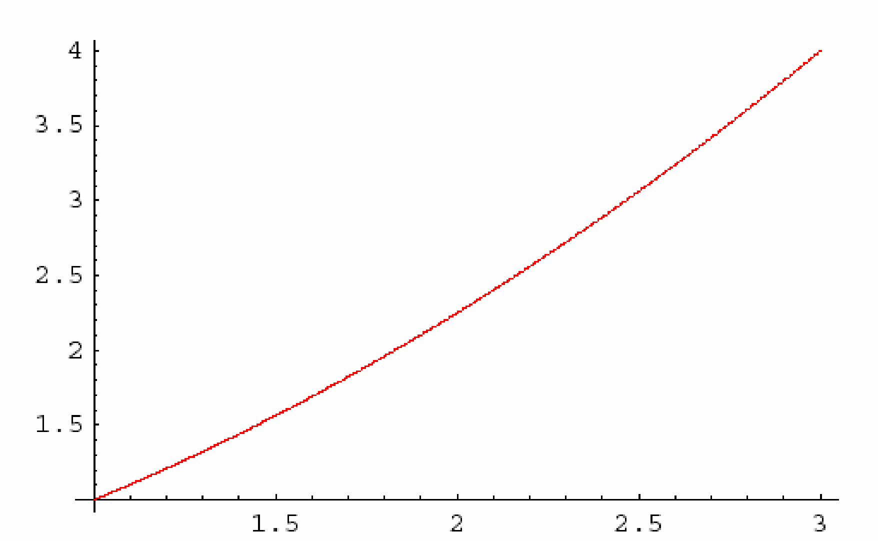



```
y[3.]=1.03349
```

Most oldjuk meg a második differenciál egyenletet, ugyanazokat az eljárásokat használva:

$$f[t\_, y\_] := \sqrt{y}$$

```
Runge4graf[f, 0.01, 1, 1, 3]
```




```
y[3.]=4.
```

A grafikon megegyezik egészen a t=2 pont előtti részig, aztán hírtelen teljesen más irányt vesznek egymáshoz képest. A hírtelen csökkenés az első differenciál egyenlet megoldása esetén a $\frac{20e^{-100(t-2)^2}}{\sqrt{\pi}}$ impulzusnak köszönhető, ami megváltoztatja a függvény menetét. Ezt az impulzus lökést a következő grafikonon ábrázoltuk:

$$\text{Plot}\left[\frac{20\, e^{-100\,(t-2)^2}}{\sqrt{\pi}},\ \{t,\ 1,\ 4\},\ \text{PlotRange} \to \text{All}\right]$$