FELTÉTEL NÉLKÜLI OPTIMALIZÁLÁS

DR. NAGY TAMÁS
egyetemi docens

Miskolci Egyetem
Alkalmazott Matematikai Tanszék

„A bemutatott kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg”
„This research was carried out as part of the TAMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 project with support by the European Union, co-financed by the European Social Fund.”

Miskolc, 2012

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény és tekintsük az alábbi feltétel nélküli optimalizációs feladatot:

$$\min\{f(\mathbf{x})\} \qquad \text{vagy egyszerűbb jelöléssel} \qquad f(\mathbf{x}) \to \min!$$

Feltétel nélküli optimalizációs feladaton általánosságban olyan feladatot értünk, amelyben az $\mathbf{x}$ döntési változóra semmiféle kikötésünk nincs, tehát $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Azonban azokat a feladatokat is feltétel nélkülieknek nevezzük, amelyben $\mathbf{x} \in D_f \subset \mathbb{R}^n$ ill. $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ kikötés áll, ahol D_f az $f(\mathbf{x})$ függvény értelmezési tartománya ill. az X egy nyílt halmaz. Az alábbiakban az optimalitásra vonatkozó legfontosabb tételeket ismertetjük. Ezek a tételek útmutatást adnak az optimális megoldás meghatározásához is. Csak olyan tételeket ismertetünk, amelyekben feltesszük az $f(\mathbf{x})$ célfüggvény differenciálhatóságát. Mivel feltesszük a többváltozós függvények differenciálhatóságát, így e fogalom, valamint a gradiens vektor és a Hesse mátrix ismerete elengedhetetlen követelmény a tananyag megértéséhez. Ezeket egy másik tananyag tárgyalja.

2. Az optimalitás szükséges és elégséges feltételei

2.1. Szükséges feltételek

TÉTEL (szükséges feltétel differenciálhatóság esetén)
Legyen az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ pontban.
Ha $\bar{\mathbf{x}}$ lokális minimumpont, akkor $\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$.

Bizonyítás
Tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ irányvektort. Feltevésünk szerint az f függvény differenciálható az $\bar{\mathbf{x}}$ pontban, így írható, hogy

$$f(\bar{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{d}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{d} + |\lambda|\,\|\mathbf{d}\|\,\alpha(\bar{\mathbf{x}}, \lambda\mathbf{d}),$$

ahol $\lim_{\lambda\to 0}\alpha(\bar{\mathbf{x}}, \lambda\mathbf{d}) = 0$. Rendezzük és utána osszuk el a fenti összefüggést $\lambda \neq 0$-val, kapjuk, hogy

$$\frac{f(\bar{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{d}) - f(\bar{\mathbf{x}})}{\lambda} = \boldsymbol{\nabla} f(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{d} \pm \|\mathbf{d}\|\,\alpha(\bar{\mathbf{x}}, \lambda\mathbf{d}).$$

Az $\bar{\mathbf{x}}$ pont lokális minimumpont, így ennek definíciója szerint $f(\bar{\mathbf{x}}+\lambda\mathbf{d}) \geqq f(\bar{\mathbf{x}})$ minden $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ vektorra, elegendően kicsi λ esetén. A baloldal számlálója tehát $\geqq 0$. Ebből következik, hogy a baloldali tört értéke λ előjelétől függően $\geqq 0$ vagy $\leqq 0$. Az egyenlőség miatt a jobboldal is, azaz a

$$\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{d} \pm \|\mathbf{d}\|\,\alpha(\bar{\mathbf{x}}, \lambda\mathbf{d})$$

mennyiség $\geqq 0$ vagy $\leqq 0$. A fenti mennyiségre a $\lambda \to 0$ határátmenet után azt kapjuk, hogy $\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{d} \geqq 0$ és $\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{d} \leqq 0$. Ebből pedig az következik, hogy $\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{d} = 0$. Ez pedig tetszőleges $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ irányvektorra csak akkor állhat fenn, ha $\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. **Q.e.d.**

Az optimalitás szükséges feltétele a $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, mivel e feltétel az optimalizálás elméletében sokszor előfordul, célszerű bevezetni az alábbi két fogalmat.

DEFINÍCIÓ (Stacionárius egyenlet definíciója)

A $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ egyenletet (valójában egyenletrendszer) stacionárius egyenletnek nevezzük.

DEFINÍCIÓ (Stacionárius pont definíciója)
Az $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ pontot stacionárius pontnak nevezzük, ha $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$.

TÉTEL (szükséges feltétel kétszer differenciálható függvény esetén)
Legyen az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ pontban.
Ha $\bar{\mathbf{x}}$ lokális minimumpont, akkor $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ és $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})$ Hesse mátrix pozitív szemidefinit.

Bizonyítás
Tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ irányvektort. Feltevésünk szerint az f függvény kétszer differenciálható az $\bar{\mathbf{x}}$ pontban, így írható, hogy

$$f(\bar{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{d}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{d} + \frac{1}{2}\lambda^2\mathbf{d}\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{d} + \lambda^2 \|\mathbf{d}\|^2 \alpha(\bar{\mathbf{x}}, \lambda\mathbf{d}),$$

ahol $\lim_{\lambda\to 0} \alpha(\bar{\mathbf{x}}, \lambda\mathbf{d}) = 0$. Mivel az $\bar{\mathbf{x}}$ pont lokális minimum, az előző tétel szerint $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. A fenti összefüggés $\lambda^2 > 0$-val való osztása után az alábbiakat kapjuk:

$$\frac{f(\bar{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{d}) - f(\bar{\mathbf{x}})}{\lambda^2} = \frac{1}{2}\mathbf{d}\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{d} + \|\mathbf{d}\|^2 \alpha(\bar{\mathbf{x}}, \lambda\mathbf{d}),$$

Az $\bar{\mathbf{x}}$ pont lokális minimum, így ennek definíciójából következik, hogy a $f(\bar{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{d}) \geqq f(\bar{\mathbf{x}})$ minden $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ vektorra, elegendően kicsi λ esetén. A baloldal $\geqq 0$, így a jobboldal is, azaz

$$\frac{1}{2}\mathbf{d}\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{d} + \|\mathbf{d}\|^2 \alpha(\bar{\mathbf{x}}, \lambda\mathbf{d}) \geqq 0.$$

A $\lambda \to 0$ határátmenetből pedig az adódik, hogy $\mathbf{d}\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{d} \geqq 0$ minden $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ vektorra. Ebből pedig a $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})$ Hesse mátrix pozitív szemidefinitsége következik. **Q.e.d.**

2.2. Elégséges feltételek

TÉTEL (elégséges feltétel)
Legyen az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ pontban.
Ha $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ és $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})$ pozitív definit, akkor $\bar{\mathbf{x}}$ szigorú lokális minimumpont.

Az alábbiakban néhány példát mutatunk be a tételek alkalmazhatóságára. Egy optimalizálási feladat megoldásához úgy állunk hozzá, hogy megpróbálunk olyan megoldást találni, amely teljesíti az optimális megoldás szükséges feltételeit. Tehát megkeressük a probléma stacionárius pontját/pontjait, azaz megoldjuk a $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ egyenletrendszert (stacionárius egyenlet). Ez azonban csak szükséges feltétel az optimumhoz, az elégséges feltétel segítségével ellenőrizni kell, hogy ez a stacionárius pont valóban optimális megoldás. Ehhez a másodrendű deriváltakból felépített Hesse mátrix definitségét kell vizsgálnunk, amelyre több definitségi teszt is ismert. Ezek a tesztek egy másik oktatási tananyagban kerültek bemutatásra.

Most néhány szót szólunk a maximum feladat kezeléséről. Legkézenfekvőbb, hogy az $f(\mathbf{x}) \to \max!$ feladatot visszavezetjük minimum feladatra, azaz a $-f(\mathbf{x}) \to \min!$ feladatot oldjuk meg. A visszavezetésből azonnal kiolvasható a maximum feladat szükséges és elégséges feltétele. Ezeket egyetlen tételben mondjuk ki.

TÉTEL (szükséges és elégséges feltétel maximum feladatra kétszer differenciálható függvény esetén)
Legyen az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ pontban.
a) Ha $\bar{\mathbf{x}}$ lokális maximumpont, akkor $\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ és $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})$ negatív szemidefinit.
b) Ha $\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ és $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})$ negatív definit, akkor $\bar{\mathbf{x}}$ szigorú lokális maximumpont.

Tehát a $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ mind a minimum mind a maximum feladatnál szükséges feltétel. A Hesse mátrix definitsége dönti el, hogy az $\bar{\mathbf{x}}$ minimumpont vagy maximumpont. Elképzelhető olyan eset is, amelynél a stacionárius pontban a Hesse mátrix indefinit. Ekkor az $\bar{\mathbf{x}}$ pontot nyeregpontnak nevezzük. Tehát a stacionárius pont háromféle pontot is definiálhat: minimumpont, maximumpont, nyeregpont. Olyan esetek is előfordulnak, hogy a stacionárius pontban a Hesse mátrix pozitív szemidefinit, tehát a minimum elsőrendű és másodrendű szükséges feltétele is teljesül és mégsem minimumpontról van szó, hanem nyeregpontról. Az elégséges feltétel azonban csak pozitív definitség esetén használható, ezért szemidefinitség esetén egyéb vizsgálatokkal kell eldönteni, hogy a stacionárius pont optimumpont vagy nyeregpont. Következzenek a példák, amelyekben rámutatunk a fentebb tárgyalt különös esetekre is.

2.3. Példák

1. Példa

Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot!

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_2^2 - 8x_1 - 28x_2 \to \min!$$

Megoldás
A stacionárius pont meghatározásához először számítsuk ki a célfüggvény gradiensét:

$$\boldsymbol{\nabla} f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_2 - 8 \\ 4x_1 + 20x_2 - 28 \end{bmatrix}.$$

A szükséges feltétel szerint ott lehet minimumpontja a célfüggvénynek, ahol a gradiens vektor zérus, tehát az alábbi egyenletrendszert (stacionárius egyenlet) kell megoldani:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 8 &= 0 \\ 4x_1 + 20x_2 - 28 &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása $x_1 = 2,\ x_2 = 1$. Az $\mathbf{x} = (2, 1)$ stacionárius pont csak jelölt az optimumra, el kell dönteni, hogy ez valóban minimumpont. Ehhez számítsuk ki a célfüggvény Hesse mátrixát, amely a következő:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}.$$

Az elégséges feltétel szerint, ha a $\mathbf{H}$ mátrix az $\mathbf{x} = (2, 1)$ pontban pozitív definit, akkor az $\mathbf{x} = (2, 1)$ stacionárius pont szigorú lokális minimumpont. A pozitív definitség eldöntésére több teszt is rendelkezésünkre áll. A 2×2-es mátrixnál célszerű a főminor (determináns) tesztet használni, mert két értéket kell kiszámítani, a $\det(h_{11}) = h_{11}$ ill. a $\det(\mathbf{H}) = h_{11}h_{22} - (h_{12})^2$ értékeket. Mivel példánkban $\det(h_{11}) = h_{11} = 2 > 0$ és $\det(\mathbf{H}) = h_{11}h_{22} - (h_{12})^2 = 24 > 0$, azaz mindegyik érték pozitív, így a Hesse mátrix pozitív definit, az elégséges feltétel szerint ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{x} = (2, 1)$ pont szigorú lokális minimumpont. A minimumpontban a célfüggvény minimális értéke $f_{\min} = f(2, 1) = -22$. Szigorú lokális minimumról van szó, ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{x} = (2, 1)$ pont környezetében csak -22-nél nagyobb függvényértékek vannak.

A további példák megoldásánál javasoljuk, hogy első lépésként határozzuk meg az $f(\mathbf{x})$ célfüggvény $\boldsymbol{\nabla} f$ gradiensét és $\mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}^2 f$ Hesse mátrixát.

2. Példa

Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot!

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_2^3 - 12x_1 - 6x_2 \rightarrow \text{extremum!}$$

Az extremum valamilyen szélsőértéket jelent, tehát a függvény maximumpontjait és minimumpontjait kell meghatározni.

Megoldás

A célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 12 \\ 6x_2^2 - 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}^2 f = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 12x_2 \end{bmatrix}.$$

A stacionárius pont meghatározásához szükséges egyenletrendszer (stacionárius egyenlet):

$$\begin{aligned} 3x_1^2 - 12 &= 0 \\ 6x_2^2 - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszernek négy megoldása van, amelyek a következők:

i	x_1	x_2
1	2	1
2	2	-1
3	-2	1
4	-2	-1

A fenti stacionárius pontokról el kell dönteni, hogy ezek minimumpontok, maximumpontok vagy nyeregpontok. A $\mathbf{H}$ Hesse mátrix definitségét a főminor teszttel vizsgáljuk meg, ehhez szükséges értékek: $\det(h_{11}) = h_{11} = 6x_1$ ill. a $\det(\mathbf{H}) = 72x_1x_2$. Ezen értékek alapján a főminor tesz szerint az alábbi eredményeket kapjuk, amelyeket táblázatos formában közlünk:

i	x_1	x_2	$\det(h_{11})$	$\det(\mathbf{H})$	$\mathbf{H}$ definitsége	A megoldás minősége	A célfv. értéke
1	2	1	12	144	pozitív definit	szig. lok. min.pont	$f_{\min} = -20$
2	2	-1	12	-144	indefinit	nyeregpont	$f = -12$
3	-2	1	-12	-144	indefinit	nyeregpont	$f = 12$
4	-2	-1	-12	144	negatív definit	szig. lok. max.pont	$f_{\max} = 20$

3. Példa

Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot!

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 15x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 16x_2x_3 - 6x_1 - 14x_2 - 26x_3 \rightarrow \min!$$

Megoldás
A célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 6 \\ 4x_1 + 10x_2 + 16x_3 - 14 \\ 6x_1 + 16x_2 + 30x_3 - 26 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 10 & 16 \\ 6 & 16 & 30 \end{bmatrix}.$$

A stacionárius pont meghatározásához szükséges egyenletrendszer (stacionárius egyenlet):

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 6 = 0 \\ 4x_1 + 10x_2 + 16x_3 - 14 = 0 \\ 6x_1 + 16x_2 + 30x_3 - 26 = 0 \end{aligned} .$$

Az egyenletrendszer lineáris egyenletrendszer, amelynek sokféle megoldási módja ismert, az olvasóra bízzuk a lineáris egyenletrendszer megoldását, mi csak a megoldást közöljük:

$$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1.$$

Ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy ez a megoldás minimumpont, meg kell vizsgálni a célfüggvény Hesse mátrixát az $\mathbf{x} = (2, -1, 1)$ pontban. A mátrix pozitív definitségét, mint láttuk, többféle módszerrel is eldönthetjük. Mi most mind a főminor (determináns) tesztet, mind az inercia tesztet bemutatjuk.

a) Főminor teszt, a szükséges determinánsok:

$$\begin{aligned} D_1 &= h_{11} = 2 > 0, \\ D_2 &= \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = 4 > 0, \\ D_3 &= \det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 10 & 16 \\ 6 & 16 & 30 \end{bmatrix} = 48 > 0, \end{aligned}$$

mivel mindhárom determináns pozitív, ezért a Hesse mátrix pozitív definit, ami az elégséges feltétel szerint azt jelenti, hogy az $\mathbf{x} = (2, -1, 1)$ pont szigorú lokális minimumpont.

b) Inercia teszt, a Schur-komplemensek:

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & 6 \\ 4 & 10 & 16 \\ 6 & 16 & 30 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}, \quad [4].$$

A pivotelemek mindkét pivotálásnál az $(1, 1)$ pozícióban lettek választva, mindkét pivotelem értéke $2 > 0$. A számítás során kapott inerciák összege adja a Hesse mátrix inerciáját, amely $Iner(\mathbf{H}) = (0, 0, 1) + (0, 0, 1) + (0, 0, 1) = (0, 0, 3)$. Mivel a Hesse mátrixnak minden sajátértéke pozitív, ezért a Hesse mátrix pozitív definit, az elégséges feltétel szerint az $\mathbf{x} = (2, -1, 1)$ pont szigorú lokális minimumpont.

Megjegyzés: Mivel lineáris egyenletrendszert kellett megoldani és a Hesse mátrix pontosan az egyenletrendszer együtthatómátrixa, ezért a leghatékonyabb az a megoldási mód, amikor az egyenletrendszert Gauss-eliminációs módszerrel oldjuk meg. Ekkor minden további számítás nélkül megállapítható a Hesse mátrix pozitív definitsége is, hiszen ha a kapott felső háromszögmátrix minden főátlóbeli eleme pozitív, akkor a Hesse mátrix pozitív definit.

4. Példa
Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot!

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3 - 6x_1 - 6x_2 \to \text{extremum!}$$

Megoldás
A célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \begin{bmatrix} 2x_1x_2 + 3x_1^2 + x_2^2 - 6 \\ 2x_1x_2 + x_1^2 + 3x_2^2 - 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}^2 f = \begin{bmatrix} 6x_1 + 2x_2 & 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 & 2x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}.$$

A stacionárius pont meghatározásához szükséges egyenletrendszer (stacionárius egyenlet):

$$\begin{aligned} 2x_1x_2 + 3x_1^2 + x_2^2 - 6 &= 0 \\ 2x_1x_2 + x_1^2 + 3x_2^2 - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszernek négy megoldása van, amelyek a következők:

i	x_1	x_2
1	1	1
2	-1	-1
3	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
4	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

A fenti stacionárius pontokról el kell dönteni, hogy ezek minimumpontok, maximumpontok vagy nyeregpontok. A 2×2-es $\mathbf{H}$ mátrixnál a főminor (determináns) teszttel a $\det(h_{11}) = h_{11} = 6x_1 + 2x_2$ ill. a $\det(\mathbf{H}) = 8x_1^2 + 32x_1x_2 + 8x_2^2$ értékeket kell kiszámítani, ezen értékek alapján a főminor tesz szerint az alábbi eredményeket kapjuk, amelyeket táblázatos formában közlünk:

i	x_1	x_2	$\det(h_{11})$	$\det(\mathbf{H})$	$\mathbf{H}$ definitsége	A megoldás minősége	A célfv. értéke
1	1	1	8	48	pozitív definit	szig. lok. min.pont	$f_{\min} = -8$
2	-1	-1	-8	48	negatív definit	szig. lok. max.pont	$f_{\max} = 8$
3	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$	-48	indefinit	nyeregpont	$f = 0$
4	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-4\sqrt{3}$	-48	indefinit	nyeregpont	$f = 0$

5. Példa
Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot!

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 e^{-\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2} \to \text{extremum!}$$

Megoldás
A célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} f &= \begin{bmatrix} x_2\left(1 - x_1^2\right)\left(e^{-\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2}\right) \\ x_1\left(1 - x_2^2\right)\left(e^{-\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2}\right) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H} &= \boldsymbol{\nabla}^2 f = \left(e^{-\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2}\right) \begin{bmatrix} x_1x_2\left(x_1^2 - 3\right) & \left(1 - x_1^2\right)\left(1 - x_2^2\right) \\ \left(1 - x_1^2\right)\left(1 - x_2^2\right) & x_1x_2\left(x_2^2 - 3\right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A stacionárius pont meghatározásához szükséges egyenletrendszer (stacionárius egyenlet):

$$\begin{aligned} x_2\,(1-x_1^2)\left(e^{-\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{2}x_2^2}\right) &= 0 \\ x_1\,(1-x_2^2)\left(e^{-\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{2}x_2^2}\right) &= 0 \end{aligned}.$$

Az egyenletrendszernek öt megoldása van, amelyek a következők:

i	x_1	x_2
1	0	0
2	1	1
3	1	-1
4	-1	1
5	-1	-1

A fenti stacionárius pontokról el kell dönteni, hogy ezek minimumpontok, maximumpontok vagy nyeregpontok. A 2×2-es $\mathbf{H}$ mátrixnál a főminor (determináns) teszttel a $\det(h_{11}) = h_{11}$ ill. a $\det(\mathbf{H})$ értékeket kell kiszámítani, ezen értékek alapján a főminor tesz szerint az alábbi eredményeket kapjuk, amelyeket táblázatos formában közlünk (mivel minden megoldásnál az exponenciális függvény értéke pozitív, ezért a teszt alkalmazásánál annak számításától eltekintettünk):

i	x_1	x_2	$\det(h_{11})$	$\det(\mathbf{H})$	$\mathbf{H}$ definitsége	A megoldás minősége	A célfv. értéke
1	0	0	0	-1	indefinit	nyeregpont	$f = 0$
2	1	1	-2	4	negatív definit	szig. lok. max.pont	$f_{\max} = \frac{1}{e}$
3	1	-1	2	4	pozitív definit	szig. lok. min.pont	$f_{\min} = -\frac{1}{e}$
4	-1	1	2	4	pozitív definit	szig. lok. min.pont	$f_{\min} = -\frac{1}{e}$
5	-1	-1	-2	4	negatív definit	szig. lok. max.pont	$f_{\max} = \frac{1}{e}$

6. Példa

Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatokat!

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad f(x_1,x_2) &= (x_1-2)^2 + (x_2-1)^3 \to \min! \\ &\text{b)} \quad f(x_1,x_2) &= (x_1-2)^2 + (x_2-1)^4 \to \min! \end{aligned}$$

Megoldás

a) A célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \begin{bmatrix} 2(x_1-2) \\ 3\,(x_2-1)^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}^2 f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6\,(x_2-1) \end{bmatrix}.$$

A stacionárius pont meghatározásához a $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ megoldása $\bar{\mathbf{x}} = (2,1)$. A célfüggvény Hesse mátrixa a stacionárius pontban

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

amelyről egyszerűen megállapítható, hogy pozitív szemidefinit. Tehát a minimumnak még a másodrendű szükséges feltétele is teljesül. A minimum elégséges feltétele viszont csak pozitív definitség esetén használható. Ilyen esetben egyéb vizsgálatokkal kell eldönteni, hogy a stacionárius pont minimumpont vagy nyeregpont. Ehhez tekintsük a stacionárius pont környezetében az

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d} = (2 + \lambda d_1, 1 + \lambda d_2)$$

vektort, ahol $\lambda > 0$ skalár, $\mathbf{d} = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ vektor. Ezt behelyettesítve a célfüggvénybe megkapjuk a stacionárius pont környezetében lévő pontokban a célfüggvény értékét, amely rendezés után az alábbi

$$f(x_1, x_2) = \lambda^2 (d_1^2 + \lambda d_2^3).$$

A stacionárius pontban a függvény értéke $f(2, 1) = 0$, a környezetében pedig a fenti képletből látható, hogy felvehet akár pozitív, akár negatív értékeket is, hiszen a $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ vektor tetszőleges lehet. Emiatt az $\mathbf{x} = (2, 1)$ pont nem lehet minimumpont. Maximumpont sem lehet egyrészt a fentiek miatt, másrészt amiatt sem, mert $\mathbf{H}$ pozitív szemidefinit, így nem teljesedik a maximum másodrendű szükséges feltétele. Tehát az $\mathbf{x} = (2, 1)$ pont nyeregpont.

b) A célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa:

$$\boldsymbol{\nabla} f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 4\,(x_2 - 1)^3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12\,(x_2 - 1)^2 \end{bmatrix}$$

A stacionárius pont $\mathbf{x} = (2, 1)$. A stacionárius pontban a Hesse mátrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

amely pozitív szemidefinit. A minimumnak a másodrendű szükséges feltétele is teljesül, de az elégséges feltételt nem tudjuk alkalmazni. Hasonlóan az a) esethez, itt is vizsgáljuk meg célfüggvény értékét a stacionárius pont környezetében lévő pontokban, ez rendezés után az alábbi

$$f(x_1, x_2) = \lambda^2 (d_1^2 + \lambda^2 d_2^4).$$

A stacionárius pontban a függvény értéke $f(2, 1) = 0$, a környezetében pedig csak pozitív értékeket vehet fel, így az $\mathbf{x} = (2, 1)$ pont minimumpont. Az is megállapítható ebből a vizsgálatból, hogy szigorú lokális minimumpontot kaptunk, sőt ez egyben globális is.

A példa arra mutat rá, hogy az optimalitáshoz a szükséges feltételek nem minden esetben elegendőek. Ha a Hesse mátrixról az derül ki, hogy definit, akkor biztosan garantálható az optimalitás az adott stacionárius pontban, sőt ekkor szigorú optimum van. Ha viszont szemidefinit a Hesse mátrix, akkor nem tudjuk eldönteni, hogy optimumpontról vagy nyeregpontról van szó, mivel ilyen elégséges tételt nem ismertettünk. Ekkor tehát egyéb módon döntünk a stacionárius pont optimalitásáról.

7. Példa

Egy gazdasági mutatót, eredmény változót (y) két tényező változó (x_1, x_2) függvényében vizsgálunk. A változókra négy megfigyelést végzünk, amelynek adatait az alábbi táblázat tartalmazza. Határozzuk meg a legkisebb négyzetek módszerével az adatokra legjobban illeszkedő $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$ lineáris függvényt!

x_1	1	-2	1	2
x_2	-1	0	1	4
y	1	3	2	4

Megoldás

Először általánosan is ismertetjük a legkisebb négyzetek módszerét. Legyen m darab megfigyelésünk és n darab tényező változónk. Ekkor a keresett függvény az $y = b_0 + b_1x_1 + \ldots + b_nx_n$. Ha behelyettesítjük az i-edik megfigyelésünk y_i eredményadatát és az $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ tényezőadatait a fenti függvénybe, akkor a két oldal általában nem egyezik meg, hisz ritka az az eset, amikor teljes függvényszerű kapcsolat van az eredményváltozó (y) és a tényező változók $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ között, így általában azt kapjuk, hogy

$$y_i \approx b_0 + b_1x_{i1} + b_2x_{i2} + \ldots + b_nx_{in} \qquad i = 1, \ldots, m$$

Keressük azokat a $b_0, b_1, \ldots, b_n$ ismeretleneket, amelynél a két oldal mérési adatonkénti eltéréseinek négyzetösszege minimális, azaz

$$\sum_{i=1}^{m} (b_0 + b_1x_{i1} + b_2x_{i2} + \ldots + b_nx_{in} - y_i)^2 \to \min!$$

Ezt nevezik legkisebb négyzetek módszerének.

Az egyszerűbb írásmód miatt javasoljuk az alábbiakat. Az eredményváltozóra vonatkozó mérési adatokat foglaljuk az $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ vektorba, a tényező változókra vonatkozó mérési adatokat pedig foglaljuk egy $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ mátrix oszlopvektoraiba úgy, hogy az első (ha úgy tetszik a nulladik) oszlop csupa egyesből álló oszlop legyen. Amennyiben a keresett együtthatókat a $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$ vektorba foglaljuk, akkor a fenti (utolsó előtti) összefüggés mátrix-vektoros jelöléssel az alábbiak szerint írható:

$$\mathbf{y} \approx \mathbf{X}\mathbf{b}.$$

Az optimalizálási feladat mátrix-vektoros formája a következő: Keressük azt a $\mathbf{b}$ vektort, amelynél a két oldal mérési adatonkénti eltéréseinek négyzetösszege minimális, azaz

$$\|\mathbf{X}\mathbf{b} - \mathbf{y}\|^2 \to \min!$$

Tehát egy feltétel nélküli optimalizálási feladatot kaptunk.

A stacionárius pont meghatározása a

$$\boldsymbol{\nabla} \|\mathbf{X}\mathbf{b} - \mathbf{y}\|^2 = \mathbf{0}$$

egyenletrendszer megoldására vezet, amelyet a gradiensképzésnél megismert szabályok alapján az alábbiakban írhatunk:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \|\mathbf{X}\mathbf{b} - \mathbf{y}\|^2 &= \boldsymbol{\nabla} \left[(\mathbf{X}\mathbf{b} - \mathbf{y})^T(\mathbf{X}\mathbf{b} - \mathbf{y})\right] = \boldsymbol{\nabla} \left[\mathbf{b}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})\mathbf{b} - 2(\mathbf{y}^T\mathbf{X})\mathbf{b} + \mathbf{y}^T\mathbf{y}\right] = \\ &= 2(\mathbf{X}^T\mathbf{X})\mathbf{b} - 2\mathbf{X}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Tehát a megoldandó egyenletrendszer:

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})\mathbf{b} = \mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

amelyet normál egyenletnek is szokás nevezni.

A mérési adatokból adódó $\mathbf{X}$ mátrix ill. $\mathbf{y}$ vektor és az ismeretlen együtthatók $\mathbf{b}$ vektora a példabeli adatokkal az alábbi:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Elvégezve a szükséges műveleteket

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 17 \end{bmatrix},$$

a normálegyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 8x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & + & 18x_3 & = & 17 \end{array}$$

A normálegyenlet megoldását most invertálással végezzük, javasoljuk az olvasónak más módszerrel történő megoldását is, a megoldás a következő:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{29}{90} & -\frac{1}{90} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{90} & \frac{7}{45} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{61}{30} \\ -\frac{7}{15} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix}.$$

Tehát a legjobban illeszkedő lineáris függvény:

$$y = \frac{61}{30} - \frac{7}{15}x_1 + \frac{7}{10}x_2.$$

8. Példa

Tekintsük az alábbi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \end{array}$$

Egy kis számolás után kiderül, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása. Feladatunk, olyan $\mathbf{x}$ vektort keresni, amelynél az egyenletrendszer két oldalának eltéréseit négyzetre emelve majd összeadva, az eltérések négyzetösszege, azaz $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2$ minimális.

Megoldás

A keresett $\mathbf{x}$ vektor az előző példa alapján az alábbi normálegyenlet megoldásaként kapható meg:

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$

A számításhoz szükséges adatok:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A megoldandó normálegyenlet:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \end{array}$$

A megoldás során azt tapasztaljuk, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, amely az alábbi:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7}+t \\ t \\ \frac{3}{7}-t \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

A végtelen sok megoldás közül válasszuk ki a legrövidebbet, azaz ahol $\|\mathbf{x}\|^2$ minimális. Az $\|\mathbf{x}\|^2 = \left(\frac{5}{7}+t\right)^2 + t^2 + (\frac{3}{7}-t)^2 = \frac{34}{49} + \frac{4}{7}t + 3t^2$ függvény a $t = -2/21$ esetén minimális, így a keresett legrövidebb $\mathbf{x}$ vektor:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 13/21 \\ -2/21 \\ 11/21 \end{bmatrix}.$$

9. Példa
Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot!

$$\begin{array}{rcl} f(x_1,x_2) & = & x_1 + \dfrac{x_1}{x_2^2} + \dfrac{x_2}{x_1} \to \min! \\ x_1, x_2 & > & 0 \end{array}$$

Megoldás
Első ránézésre ez a feladat nem feltétel nélküli optimalizálási feladat, mivel azonban a halmaz, amelyen keresni kell az optimumot nyílt halmaz ($x_1, x_2 > 0$), így ekkor is használhatjuk a feltétel nélküli optimalizálásra vonatkozó tételeinket. A stacionárius pontok közül természetesen csak a feltételnek megfelelőeket fogadjuk el. A célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_2^2} - \frac{2}{x_1^2}x_2 + 1 \\ \frac{2}{x_1} - 2\frac{x_1}{x_2^3} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{4x_2}{x_1^3} & -\frac{2}{x_1^2} - \frac{2}{x_2^3} \\ -\frac{2}{x_1^2} - \frac{2}{x_2^3} & 6\frac{x_1}{x_2^4} \end{bmatrix}.$$

A $\nabla f = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldásai: $x_1 = 1, x_2 = 1$ ill. $x_1 = -1, x_2 = 1$. Figyelembe véve a változókra előírt pozitivitást, stacionárius pont az $\bar{\mathbf{x}} = (1,1)$. A célfüggvény Hesse mátrixa az $\bar{\mathbf{x}} = (1,1)$ stacionárius pontban:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix},$$

amelyről egyszerűen eldönthetjük, hogy pozitív definit, így az $\bar{\mathbf{x}} = (1,1)$ optimális megoldás, mégpedig szigorú lokális minimumpont.

10. Példa
Adott az alábbi kétváltozós kvadratikus függvény:

$$f(x_1,x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f$$

Milyen együtthatók esetén van szigorú szélsőérték (extremum) és milyen minőségűek?

Megoldás
A célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2ax_1 + bx_2 + d \\ bx_1 + 2cx_2 + e \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{bmatrix}.$$

Mivel kvadratikus a függvény, ezért a Hesse mátrix minden $\mathbf{x}$ vektor esetén azonos. A fenti Hesse mátrix pedig akkor és csak akkor pozitív definit, ha $2a > 0$ és $4ac - b^2 > 0$, ill. negatív definit, ha $2a < 0$ és $4ac - b^2 > 0$. Tehát csak ott van szigorú szélsőérték, ahol $4ac - b^2 > 0$. Az a együttható előjele dönti el, hogy minimuma vagy maximuma van a függvénynek. Az $a > 0$ esetén minimum, $a < 0$ esetén pedig maximum van. A $4ac - b^2 > 0$ feltétel maga után vonja, hogy az a és c együtthatók előjele megegyezik. A $\nabla f = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldása

$$x_1 = \frac{be - 2cd}{4ac - b^2}, \qquad x_2 = \frac{bd - 2ae}{4ac - b^2},$$

amely az optimális megoldásokat adja a feltételeknek megfelelő paraméterek esetén.

11. Példa
Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot!

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \to \min!$$

Megoldás
A célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 + 4(x_1 - 2)^3 \\ -4x_1 + 8x_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} 12(x_1 - 2)^2 + 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

A $\nabla f = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek a megoldása: $x_1 = 2, x_2 = 1$, a stacionárius pont tehát az $\bar{\mathbf{x}} = (2, 1)$. A célfüggvény Hesse mátrixa az $\bar{\mathbf{x}} = (2, 1)$ stacionárius pontban:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix},$$

amelyről a főminor teszttel egyszerűen eldönthetjük, hogy pozitív definit, így az $\bar{\mathbf{x}} = (2, 1)$ optimális megoldás, szigorú lokális minimumpont.

12. Példa
Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot!

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 9x_2^2 - 6\ln(x_1x_2) \to \min!$$

Megoldás
Ez is feltétel nélküli optimalizálási feladat, itt azonban nem az $\mathbb{R}^n$-ben keressük a minimumpontot, hanem a függvény értelmezési tartományában, amely egy nyílt halmaz ($x_1x_2 > 0$).

A célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 - \frac{6}{x_1} \\ -4x_1 + 18x_2 - \frac{6}{x_2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} 2 + \frac{6}{x_1^2} & -4 \\ -4 & 18 + \frac{6}{x_2^2} \end{bmatrix}.$$

A $\nabla f = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldásai közül természetesen csak azok jöhetnek szóba, amelyeknél $x_1 x_2 > 0$, azaz az ismeretlenek egyező előjelűek, ezek a következők: $x_1 = 3, x_2 = 1$, illetve $x_1 = -3, x_2 = -1$.

Az $\bar{\mathbf{x}}_1 = (3, 1)$ ill. az $\bar{\mathbf{x}}_2 = (-3, -1)$ stacionárius pontban a célfüggvény Hesse mátrixa ugyanaz:

$$\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}_1) = \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}_2) = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -4 \\ -4 & 24 \end{bmatrix},$$

amelyről a főminor teszttel egyszerűen eldönthetjük, hogy pozitív definit, így az $\bar{\mathbf{x}}_1 = (3, 1)$ és az $\bar{\mathbf{x}}_2 = (-3, -1)$ pontok szigorú lokális minimumpontok. A célfüggvény értéke mindkét pontban: $6 - 6 \ln 3 \approx -0.59$.

13. Példa

Tekintsünk egy gazdasági problémát, amelyben egy bizonyos termelő egyetlen terméket állít elő két termelési tényező felhasználásával. Jelölje x_1, x_2 a termelés során felhasznált termelési tényezők mennyiségét. Legyen adott az $f(x_1, x_2) = 2x_1^{0.2} x_2^{0.5}$ ún. Cobb-Douglas-féle termelési függvény, amely a termelési tényezőkkel előállítható termékmennyiséget fejezi ki a termelési tényezők mennyiségének függvényében. A termelési tényezők egységára legyen 8 ill. 5, a termék eladási ára pedig 10 pénzegység. Határozzuk meg a termelési tényezők azon optimális mennyiségét, amelynél a termelő nyeresége maximális!

Megoldás

Először a probléma matematikai modelljét írjuk fel. A nyereséget az árbevétel és a költségek különbségeként kapjuk, így az alábbi optimalizálási feladatot kell megoldani:

$$\begin{aligned} 10(2x_1^{0.2} x_2^{0.5}) - (8x_1 + 5x_2) &\;\rightarrow\; \max! \\ x_1, x_2 &\;\geqq\; 0 \end{aligned}$$

A feladat feltételes optimalizálási feladat, azonban feltétel nélküli optimalizálási feladatként kezelhetjük. Kizárhatjuk, hogy valamely x_i zérus értéket vegyen fel. Ha valamelyik $x_i = 0$, akkor az $f(x_1, x_2)$ Cobb-Douglas termelési függvény által meghatározott termékmennyiség is zérus. Ekkor pedig a $-(8x_1 + 5x_2) \rightarrow \max!$ optimális megoldása az $\mathbf{x} = (0, 0)$, ennek pedig nincs gyakorlati jelentősége. Tehát feltehető, hogy $x_1, x_2 > 0$, ez pedig egy nyílt halmaz, amely szerint feltétel nélküli optimalizálási feladatként kezelhetjük a problémát.

A célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{4x_2^{0.5}}{x_1^{0.8}} - 8 \\ \frac{10x_1^{0.2}}{x_2^{0.5}} - 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} -\frac{3.2x_2^{0.5}}{x_1^{1.8}} & \frac{2}{x_1^{0.8} x_2^{0.5}} \\ \frac{2}{x_1^{0.8} x_2^{0.5}} & -\frac{5x_1^{0.2}}{x_2^{1.5}} \end{bmatrix}.$$

A $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldása: $x_1 = 1, x_2 = 4$.

Az $\bar{\mathbf{x}} = (1, 4)$ stacionárius pontban a célfüggvény Hesse mátrixa:

$$\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} -6.4 & 1 \\ 1 & -0.625 \end{bmatrix},$$

amelyről a főminor teszttel egyszerűen eldönthetjük, hogy negatív definit, így az $\bar{\mathbf{x}} = (1, 4)$ szigorú lokális maximumpont, azaz az első termelési tényezőből 1, a másodikból pedig 4 egység felhasználása biztosítja a maximális nyereséget. A maximális nyereség értéke 12 pénzegység, ebből az árbevétel 40, a költség pedig 28.

14. Példa

Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot!

$$f(x_1, x_2) = 20 \ln (x_1 \sqrt{x_2}) - 3x_1 - x_1 x_2 - x_2 \to \max!$$

Megoldás

Ebben a feladatban a célfüggvény értelmezési tartományában keressük az optimális megoldást, tehát ez is feltétel nélküli optimalizálási feladatként kezelhető.

A célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \begin{bmatrix} \frac{20}{x_1} - 3 - x_2 \\ \frac{10}{x_2} - x_1 - 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}^2 f = \begin{bmatrix} -\frac{20}{x_1^2} & -1 \\ -1 & -\frac{10}{x_2^2} \end{bmatrix}.$$

A $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek két megoldása van: $\bar{\mathbf{x}}_1 = (4, 2)$ ill. az $\bar{\mathbf{x}}_2 = (-\frac{5}{3}, -15)$. A megoldások közül természetesen csak azok jöhetnek szóba, amelyeknél $x_1, x_2 > 0$, tehát a stacionárius pont az $\bar{\mathbf{x}}_1 = (4, 2)$. Az $\bar{\mathbf{x}}_1 = (4, 2)$ stacionárius pontban a célfüggvény Hesse mátrixa:

$$\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}_1) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & -1 \\ -1 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix},$$

amelyről a főminor teszttel egyszerűen eldönthetjük, hogy negatív definit, így az $\bar{\mathbf{x}}_1 = (4, 2)$ pont szigorú lokális maximumpont.

15. Példa

Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot!

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 3x_2x_3 + x_1x_3 - 14 \to \text{extremum!}$$

Megoldás

A célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}^2 f = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

A stacionárius pont meghatározásához szükséges egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Egy homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldani. Mint tudjuk, a homogén lineáris egyenletrendszernek az $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$ triviális megoldáson kívül akkor és csak akkor vannak más megoldásai (végtelen sok), ha az együtthatómátrix determinánsa zérus. Könnyen ellenőrizhető, hogy az együtthatómátrix a Hesse mátrix, amelynek determinánsa, $\det(\mathbf{H}) = -110 \neq 0$, tehát a stacionárius megoldás az $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$. Erről kell eldönteni, hogy minimumpont, maximumpont vagy nyeregpont. Mivel a $\mathbf{H}$ Hesse mátrix főátlójában van pozitív és negatív szám is, így nem lehet se negatív se pozitív definit, sőt szemidefinit sem, így $\mathbf{H}$ indefinit, ami azt jelenti, hogy az origó az egyetlen stacionárius pont, amely nyeregpont.

16. Példa
Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot!

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 3x_1x_2 - 3x_2x_3 - 3x_1x_3 + 50x_1 - 30x_2 + 20x_3 + 7 \to \text{extremum!}$$

Megoldás
A célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \begin{bmatrix} -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 50 \\ -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 30 \\ -3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 20 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}^2 f = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

A stacionárius pont meghatározásához szükséges $\boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{0}$ egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= -50 \\ -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 30 \\ -3x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= -20 \end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszernek egyetlen megoldása van: $x_1 = -35, x_2 = 45, x_3 = -5$. Az $\mathbf{x} = (-35, 45, -5)$ stacionárius megoldás nyeregpont, mert a $\mathbf{H}$ Hesse mátrix indefinit, a főminorteszt alapján a főminorok rendre: $-2, -5, -8$. Javasoljuk az olvasónak, hogy az inerciateszt használatával is döntse el a Hesse mátrix indefinitségét.

17. Példa
Oldjuk meg az alábbi optimalizálási feladatot!

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^3 - x_1 x_2 \to \text{extremum!}$$

Megoldás
A célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \begin{bmatrix} 2x_1x_2 + x_2^3 - x_2 \\ x_1^2 + 3x_1x_2^2 - x_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}^2 f = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 + 3x_2^2 - 1 \\ 2x_1 + 3x_2^2 - 1 & 6x_1x_2 \end{bmatrix}.$$

A stacionárius pont meghatározásához szükséges egyenletrendszer (stacionárius egyenlet):

$$\begin{aligned} 2x_1x_2 + x_2^3 - x_2 &= 0 \\ x_1^2 + 3x_1x_2^2 - x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldását egyszerűbb kezelni, ha az egyenletekből kiemeljük az x_2 ill. az x_1 változót. Az egyenletrendszernek hat megoldása van, amelyek a következők:

i	x_1	x_2
1	0	0
2	1	0
3	0	1
4	0	-1
5	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
6	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$

A fenti stacionárius pontokról el kell dönteni, hogy ezek minimumpontok, maximumpontok vagy nyeregpontok. A feladat megoldását az alábbi táblázatban foglaltuk össze:

i	x_1	x_2	$\mathbf{H}$	$\mathbf{H}$ definitsége	A megoldás minősége
1	0	0	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	indefinit	nyeregpont
2	1	0	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	indefinit	nyeregpont
3	0	1	$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	indefinit	nyeregpont
4	0	-1	$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	indefinit	nyeregpont
5	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{12}{25}\sqrt{5} \end{bmatrix}$	pozitív definit	szigorú lokális minimumpont
6	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{12}{25}\sqrt{5} \end{bmatrix}$	negatív definit	szigorú lokális maximumpont

3. Érzékenységvizsgálat

Nagyon sok gyakorlati optimalizálási feladat esetében nem csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy mi az optimális megoldás, hanem arra is, hogy az optimalizálási feladat egy adatának megváltozása hogyan befolyásolja az optimális megoldást, azaz milyen hatást gyakorol a célfüggvényre ill. az egyes döntési változókra. Az optimalizálási feladatnak azt az adatát, amelynek változását vizsgáljuk paraméternek nevezzük. Ezzel a kérdéskörrel foglalkozunk az alábbiakban. Először csak egy paramétert tartalmazó optimalizálási feladattal foglalkozunk, a későbbiekben röviden kitérünk a több paraméteres esetre is.

Az érzékenységvizsgálatnál a láncszabályt és az implicit függvény tételt fogjuk alkalmazni, ezeket a témaköröket egy másik tananyag tárgyalja.

3.1. Célfüggvény érzékenységvizsgálata (burkolótétel)

Legyen a döntési változók vektora $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, az egyetlen paraméter pedig legyen $p \in \mathbb{R}$. A feltételes optimalizálási feladat legyen

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p) \to \min!$$

A stacionárius pont meghatározásához megoldjuk a $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, p) = \mathbf{0}$ egyenletrendszert, amelynek baloldalán az f célfüggvény x_j változók szerinti parciális deriváltjai szerepelnek (ezért használtuk a gradiensnél a $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f$ jelölést a $\boldsymbol{\nabla} f$ jelölés helyett). Tegyük fel, hogy fennállnak az implicit függvény tétel feltételei, így a döntési változók optimális értékei felírhatók a paraméter függvényében, azaz

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(p), \\ x_2 &= x_2(p), \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(p). \end{aligned}$$

Az implicit függvény tétel szerint ez a felírás akkor tehető meg, ha a $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, p) = \mathbf{0}$ egyenletrendszerben szereplő függvények Jacobi-mátrixa invertálható. Jelen esetben a Jacobi-mátrix nem más mint az f célfüggvénynek a Hesse-mátrixa ($\boldsymbol{\nabla}^2_{\mathbf{xx}} f$), természetesen csak az x_j változók szerinti második parciális deriváltak szerepelnek benne. Ha az $x_i(p)$ mennyiségeket behelyettesítjük a célfüggvénybe, akkor megkapjuk a célfüggvény optimális értékét a paraméter függvényében, ezt a függvényt optimum érték függvénynek is szokás nevezni és M-el jelöljük, utalva ezzel a minimumra. Tehát az optimum érték függvény

$$M(p) = f(x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p), p).$$

TÉTEL (Burkolótétel):

Legyen adott a $\min\{f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ feltétel nélküli optimalizálási feladat $M(p)$ optimum érték függvénye. Ekkor az optimum érték függvény p paraméter szerinti deriváltja

$$\frac{dM(p)}{dp} = \left.\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)}{\partial p}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)}$$

Szavakban kifejezve: Az $M(p)$ optimum érték függvény p paraméter szerinti deriváltja megegyezik az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)$ célfüggvény p paraméter szerinti parciális deriváltjának az optimumhelyen vett értékével.

Bizonyítás:

Induljunk ki az $M(p)$ optimum érték függvény definíciójából. Alkalmazzuk a láncszabályt, amely szerint először a p szerinti parciális deriváltat, majd a döntési változók szerinti parciális deriváltak segítségével számolt deriváltakat számítjuk ki és ezeket összeadjuk, ekkor

$$\frac{dM(p)}{dp} = \frac{\partial f(x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p), p)}{\partial p} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p), p)}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j(p)}{dp}$$

Az optimalizálás ($\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, p) = \mathbf{0}$) szükséges feltétele miatt

$$\frac{\partial f(x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p), p)}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

így a bizonyítandó összefüggést kapjuk, azaz

$$\frac{dM(p)}{dp} = \frac{\partial f(x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p), p)}{\partial p} = \left.\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)}{\partial p}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)}$$

Q.e.d.

Röviden szólunk a tétel tartalmáról. A burkolótétel arra ad választ, hogy a p paraméter megváltozása milyen módon változtatja meg az $M(p)$ optimum érték függvényt. A p paraméter megváltozásának a célfüggvényre gyakorolt hatása kettős. A láncszabály alkalmazásakor látszik ez a kétféle hatás, az első tag a közvetlen hatást fejezi ki, vagyis azt, hogy a p megváltozása közvetlenül milyen hatást gyakorol az $M(p)$ változására. A második (szummás) tag pedig a közvetett hatást adja meg, vagyis azt, hogy a p megváltozása közvetve, a döntési változók megváltozásán keresztül milyen hatást gyakorol az $M(p)$ változására. Az optimalitás szükséges feltétele miatt a második (szummás) tag zérus, így csak a közvetlen hatás érvényesül. A burkolótétel tehát azt a fontos összefüggést fejezi ki, miszerint a p paraméter megváltozásának az $M(p)$ változására csak a közvetlen hatás érvényesül.

Más oldalról is értelmezhetjük a burkolótételt. Legyen adott egy p' paraméter, ehhez tartozó optimális megoldások: $x_j(p')$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Helyettesítsük be az optimális megoldásokat a célfüggvénybe, ekkor kapjuk az $f(\mathbf{x}(p'), p) = f(x_1(p'), x_2(p'), \ldots, x_n(p'), p)$ függvényt. Az $f(\mathbf{x}(p'), p)$ függvény és az $M(p)$ függvények természetesen nem azonosak, hisz az $f(\mathbf{x}(p'), p)$ függvény egy adott (p' paraméterhez tartozó) optimális megoldás esetén adja meg a célfüggvény minimumát a p paraméter függvényében. Képzeletben rajzoljuk fel egy koordinátarendszerben az $f(\mathbf{x}(p'), p)$ függvényt a p függvényében. Az $f(\mathbf{x}(p'), p)$ függvénynek a $p = p'$ helyen vett értéke természetesen megegyezik az $M(p)$ függvény $p = p'$ helyen vett értékével. Ha most minden p' értékekhez felrajzoljuk a $f(\mathbf{x}(p'), p)$ görbéket és a görbéken bejelöljük a $p = p'$ helyeken a pontokat, akkor azt tapasztaljuk, hogy ezen pontok alkotta görbe pontosan az $M(p)$ függvényt adja úgy, hogy nem csak a függvényértékeik, hanem az érintőjük, vagyis az első deriváltjuk is azonos a $p = p'$ helyen. Tehát az $M(p)$ függvény a szóbanforgó görbék burkolója, ebből a tényből ered a tétel elnevezése.

3.2. Döntési változók érzékenységvizsgálata

TÉTEL

Legyen adott az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p) \to \min!$ optimalizálási feladat döntési változóinak $x_1 = x_1(p), x_2 = x_2(p), \ldots, x_n = x_n(p)$ optimális értékei a p paraméter függvényében, ezeket az $\mathbf{x}(p) = (x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p))$ vektorba foglaljuk. Ekkor a döntési változók vektorának p paraméter szerinti deriváltja

$$\frac{d}{dp}\mathbf{x}(p) = -\left[\mathbf{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)}\right]^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial p}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)}.$$

Szavakban: A döntési változók p paraméter szerinti deriváltvektora számítható a Hesse mátrix optimumhelyen vett értéke inverzének és a gradiensvektor p paraméter szerinti parciális deriváltjának az optimumhelyen vett értékének a segítségével.

Bizonyítás:

Induljunk ki az optimalitás szükséges feltételéből, amely szerint

$$\frac{\partial f(x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p), p)}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Vegyük mindkét oldalnak a p paraméter szerinti parciális deriváltját, azaz

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial f(x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p), p)}{\partial x_j}\right) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

A p szerinti deriváltra alkalmazzuk a láncszabályt, amely szerint először a p szerinti parciális deriváltat, majd a döntési változók szerinti parciális deriváltak segítségével számolt deriváltakat számítjuk ki és ezeket összeadjuk, ekkor a láncszabály alkalmazása után a derivált a következő formában írható fel

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial f(x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p), p)}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p), p)}{\partial x_j}\right) \cdot \frac{dx_i(p)}{dp} = 0,$$

minden $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén. A $\frac{\partial f(x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p), p)}{\partial x_j}$ mennyiségek a $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f$ vektor elemei, ezen elemek képletben szereplő p szerinti parciális deriváltjait jelöljük $\frac{\partial}{\partial p}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)}$ vektorral, a $\frac{dx_i(p)}{dp}$ mennyiségeket foglaljuk a $\frac{d}{dp}\mathbf{x}(p)$ vektorba, az f függvény döntési változók szerinti másodrendű parciális deriváltjai pedig mint jól tudjuk az f függvény Hesse mátrixa, jelben $\mathbf{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)}$, így a fenti összefüggés mátrix-vektoros jelöléssel az alábbi szerint írható

$$\frac{\partial}{\partial p}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)} + \mathbf{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)} \cdot \frac{d}{dp}\mathbf{x}(p) = \mathbf{0}.$$

Mivel az implicit függvény tétel feltétele teljesül, azaz létezik a Hesse-mátrixnak inverze, így a következő formula adódik a döntési változók p szerinti deriváltjaira

$$\frac{d}{dp}\mathbf{x}(p) = -\left[\mathbf{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)}\right]^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial p}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)}.$$

Q.e.d.

Megjegyzés:
Egyszerűbben is eljuthatunk ehhez az eredményhez, ha közvetlenül alkalmazzuk az implicit függvény tételt. Az egyenletrendszer $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, p) = \mathbf{0}$, a Jacobi-mátrix $\mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}^2_{\mathbf{xx}} f(\mathbf{x}, p)$, a döntési változók vektora $\mathbf{x}(p)$. Az implicit függvény tétel szerint

$$\frac{d}{dp}\mathbf{x}(p) = -\mathbf{H}^{-1} \cdot \frac{d}{dp}(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, p))$$

Továbbá azt is megjegyezzük, hogy ugyanezek az összefüggések érvényesek, ha maximum feladatról van szó, azaz a maximum feladat célfüggvényének gradiensét és Hesse mátrixát kell szerepelteni a fenti összefüggésekben. Erről az olvasó könnyen meggyőződhet.

3.3. Példák

18. Példa

Idézzuk a 13. példát, amely a következő volt: "Tekintsünk egy gazdasági problémát, amelyben egy bizonyos termelő egyetlen terméket állít elő két termelési tényező felhasználásával. Jelölje x_1, x_2 a termelés során felhasznált termelési tényezők mennyiségét. Legyen adott az $f(x_1, x_2) = 2x_1^{0.2}x_2^{0.5}$ un. Cobb-Douglas-féle termelési függvény, amely a termelési tényezőkkel előállítható termékmennyiséget fejezi ki a termelési tényezők mennyiségének függvényében. A termelési tényezők egységára legyen 8 ill. 5, a termék eladási ára pedig 10 pénzegység. Határozzuk meg a termelési tényezők azon optimális mennyiségét, amelynél a termelő nyeresége maximális!"

A feladat optimális megoldása: $x_1 = 1, x_2 = 4$, a maximális nyereség: 12.

Most vizsgáljuk meg, hogyan változik az optimális megoldás, ha a Cobb-Douglas-féle termelési függvényben az x_1 döntési változó kitevőjét megváltoztatjuk, vagyis mennyire érzékeny a modell ezen változó módosítására.

Megoldás

A feladat módosított változata, amelyben a p paraméter az x_1 döntési változó kitevője:

$$f(\mathbf{x}, p) = 10(2x_1^p x_2^{0.5}) - (8x_1 + 5x_2) \to \max!$$

A $p = 0.2$-re ismert az optimális megoldás, amely

$$x_1(p) = 1, \quad x_2(p) = 4, \qquad M(p) = 12.$$

a) A célfüggvény érzékenységvizsgálata:

A burkolótétel értelmében

$$\frac{dM(p)}{dp} = \left.\frac{\partial f(\mathbf{x}, p)}{\partial p}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)} = 20x_2^{0.5}x_1^p \ln x_1\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)} = 20 \cdot 4^{0.5} \cdot 1^{0.2} \cdot \ln 1 = 0,$$

tehát ha a p paraméter, azaz az első termelési tényező kitevője megváltozik, mondjuk ε nagyon kicsi értékkel, akkor a maximális nyereség $M(p) = 12$-ről gyakorlatilag nem változik.

b) A döntési változók érzékenységvizsgálata:

A célfüggvény döntési változók szerinti gradiense, ennek a p paraméter szerinti deriváltja.

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, p) = \begin{bmatrix} 20px_2^{0.5}x_1^{p-1} - 8 \\ \frac{10}{x_2^{0.5}}x_1^p - 5 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial p}\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, p) = \begin{bmatrix} 20x_2^{0.5}x_1^{p-1}(1 + \ln x_1) \\ \frac{10}{x_2^{0.5}}x_1^p \ln x_1 \end{bmatrix}.$$

Az utóbbi vektor optimumhelyen vett értéke:

$$\left.\frac{\partial}{\partial p}\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, p)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A célfüggvény döntési változók szerinti Hesse mátrixának optimumhelyen vett értéke nem más mint az eredeti feladat Hesse mátrixa, a számításhoz szükséges inverz:

$$\mathbf{H} = \nabla^2_{\mathbf{xx}} f(\mathbf{x}, p) = \begin{bmatrix} -6.4 & 1 \\ 1 & -0.625 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{24} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{32}{15} \end{bmatrix}.$$

A tétel értelmében

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp}\mathbf{x}(p) &= -\left[\mathbf{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)}\right]^{-1} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial p}\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, p)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)} = \\ &= -\begin{bmatrix} -\frac{5}{24} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{32}{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{3} \\ \frac{40}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az eredmény értelmezése a következő:

Ha a p paraméter, azaz az első termelési tényező kitevője 0.2-ről megváltozik, mondjuk ε nagyon kicsi értékkel, akkor az első termelési tényezőből felhasználandó optimális mennyiség értéke $x_1 = 1$-ről megközelítőleg $1 + 8.33\varepsilon$ értékre, a második termelési tényezőből felhasználandó optimális mennyiség értéke pedig $x_2 = 4$-ről megközelítőleg $4 + 13.33\varepsilon$ értékre változik. Az eredményből az is látható, hogy a kitevő változásával azonos irányban változik a termelési tényezők mennyisége.

Megjegyzés:
Ha a p paraméter $p = 0.2$-ről $p = 0.201$-re változik ($\varepsilon = 0.001$), akkor
a valódi optimális megoldás:
$x_1 = 1.008375248$, $x_2 = 4.013433824$, $M(p) = 12.00016713$,
az érzékenységvizsgálattal kapott megoldás:
$x_1 = 1.008333333$, $x_2 = 4.013333333$, $M(p) = 12$.
Látható, hogy az $\varepsilon = 0.001$ elegendően kicsi megváltozásra a fenti érzékenységvizsgálat eredménye közel azonos a valódi optimális megoldással.

19. Példa
Adott az alábbi optimalizálási feladat:

$$f(x_1, x_2, p) = (px_1 - 2)^2 + 6x_1 + px_2^2 - 4x_2 \to \min!$$

Végezzük el az érzékenységvizsgálatot a $p = 0.5$ paraméterérték esetében!

Megoldás
Először megoldjuk a $p = 0.5$ paraméterhez tartozó optimalizálási feladatot, a célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa a következő:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f = \begin{bmatrix} 0.5x_1 + 4 \\ x_2 - 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}^2_{\mathbf{xx}} f = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f = \mathbf{0}$ stacionárius egyenlet megoldása: $x_1 = -8, x_2 = 4$. A megoldás optimális, mert a Hesse mátrix pozitív definit. A célfüggvény minimális értéke: -20.

a) A célfüggvény érzékenységvizsgálata:
A burkolótétel értelmében

$$\frac{dM(p)}{dp} = \left.\frac{\partial f(\mathbf{x}, p)}{\partial p}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)} = 2(px_1 - 2)x_1 + x_2^2\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)} = 112,$$

tehát ha a p paraméter értéke 0.5-ről ε nagyon kicsi értékkel megváltozik, akkor a célfüggvény minimális értéke $M(p) = -20$-ról megközelítőleg $-20 + 112\varepsilon$ értékre változik. A paraméter változásával azonos irányban változik a célfüggvény minimális értéke.

b) A döntési változók érzékenységvizsgálata:
A szükséges számítások:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, p) = \begin{bmatrix} 2p(px_1 - 2) + 6 \\ 2px_2 - 4 \end{bmatrix}, \frac{\partial}{\partial p}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, p) = \begin{bmatrix} 4px_1 - 4 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \left.\frac{\partial}{\partial p}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, p)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)} = \begin{bmatrix} -20 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

A vonatkozó tétel értelmében

$$\frac{d}{dp}\mathbf{x}(p) = -\left[\mathbf{H}(\mathbf{x}, p)\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)}\right]^{-1} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial p}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, p)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)} = -\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Az eredmény értelmezése a következő:

Ha a p paraméter értéke 0.5-ről megváltozik, mondjuk ε nagyon kicsi értékkel, akkor az x_1 döntési változó értéke az $x_1 = -8$-ról megközelítőleg $-8 + 40\varepsilon$ értékre, az x_2 döntési változó értéke pedig az $x_2 = 4$-ről megközelítőleg $4-8\varepsilon$ értékre változik. Tehát a p paraméter változásával az x_1 azonos irányban, az x_2 pedig ellentétes irányban változik. A gyakorlatban sok esetben már a derivált előjele is hasznos információkat szolgáltat a hatás vizsgálatában.

Megjegyzés:
Ha a p paraméter $p = 0.5$-ről $p = 0.499$-re változik $(\varepsilon = -0.001)$, akkor
a valódi optimális megoldás:
$x_1 = -8.040128353$, $x_2 = 4.008016032$, $M(p) = -20.11236903$,
az érzékenységvizsgálattal kapott megoldás:
$x_1 = -8.04$, $x_2 = 4.008$, $M(p) = -20.112$.
Látható, hogy az $\varepsilon = -0.001$ elegendően kicsi megváltozásra a fenti érzékenységvizsgálat eredménye közel azonos a valódi optimális megoldással.

Az érzékenységvizsgálatot általában a fentiekben bemutatott módon szokás vizsgálni, nevezetesen a paraméter egy adott értékével megoldjuk az optimalizálási feladatot, majd megvizsgáljuk, hogy ha ez a paraméterérték megváltozik, akkor ez a változás milyen hatást gyakorol az optimális megoldásra, vagyis a célfüggvény értékére, ill. a döntési változók értékére.

A következőkben ugyanezt a feladatot nem a fenti módon kezelve oldjuk meg, hanem megkeressük a feladat optimális megoldását a p paraméter függvényében. A paraméteres célfüggvény gradiense és Hesse mátrixa:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f = \begin{bmatrix} 2p(px_1 - 2) + 6 \\ 2px_2 - 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}^2_{\mathbf{xx}} f = \begin{bmatrix} 2p^2 & 0 \\ 0 & 2p \end{bmatrix}$$

A stacionárius pont meghatározásához szükséges egyenletrendszer ($\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f = \mathbf{0}$):

$$\begin{aligned} 2p(px_1 - 2) + 6 &= 0 \\ 2px_2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Az implicit függvény tétel szerint, ha $\det(\mathbf{H}) \neq 0$, akkor az egyenletrendszer megoldása, tehát a stacionárius pont felírható a p paraméter függvényében. A $p \neq 0$ paraméter esetén a determináns nem zérus, így a stacionárius pont:

$$\begin{aligned} x_1(p) &= \frac{2}{p} - \frac{3}{p^2}, \\ x_2(p) &= \frac{2}{p}. \end{aligned}$$

Ha $p > 0$, akkor $\mathbf{H}$ pozitív definit, így $p > 0$ esetén a kapott stacionárius pont szigorú lokális minimumpont. Az optimális megoldás és az értékfüggvény a p paraméter függvényében az alábbi képletekkel számítható:

$$\begin{aligned} x_1(p) &= \frac{2}{p} - \frac{3}{p^2} \\ x_2(p) &= \frac{2}{p} \\ M(p) &= -\frac{9}{p^2} + \frac{8}{p} \end{aligned}$$

Ha $p < 0$, akkor $\mathbf{H}$ indefinit, így $p < 0$ esetén a kapott stacionárius pont nyeregpont.

Ha $p = 0$, akkor célfüggvényként az $f(x_1, x_2) = 6x_1 - 4x_2 + 4$ lineáris függvényt kapjuk, így $p = 0$ esetén se maximuma, se minimuma, se nyeregpontja nincs a függvénynek.

Amennyiben az optimális megoldásra kapott függvényeket a p paraméter szerint deriváltjuk, akkor bármely $p > 0$ paraméterértékekre megkapjuk az érzékenységvizsgálat eredményét, azaz a célfüggvény és a döntési változók deriváltjait, ezek az alábbiak:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(p)}{dp} &= -\frac{2}{p^2} + \frac{6}{p^3} \\ \frac{dx_2(p)}{dp} &= -\frac{2}{p^2} \\ \frac{dM(p)}{dp} &= \frac{18}{p^3} - \frac{8}{p^2} \end{aligned}$$

A példabeli $p = 0.5$ paraméterértékhez tartozó deriváltakat az olvasó egyszerű behelyettesítéssel kiszámíthatja és a másik módszerrel számított eredményeket kapja.

Ezt a módszert főleg akkor használják, amikor sok paraméter érték esetén akarnak érzékenységvizsgálatot végrehajtani.

Ennél a módszernél nem kellett használni az érzékenységvizsgálatnál megismert tételeket. Természetesen ugyanerre az eredményre jutunk, ha az érzékenységvizsgálatot a tételek segítségével végezzük el. A tételek begyakorlása miatt az érzékenységvizsgálatot elvégezzük így is.

a) A célfüggvény érzékenységvizsgálata:
A burkolótétel alkalmazásával kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \frac{dM(p)}{dp} &= \left.\frac{\partial f(\mathbf{x}, p)}{\partial p}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)} = \frac{\partial}{\partial p}\left[(px_1 - 2)^2 + 6x_1 + px_2^2 - 4x_2\right]\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)} = \\ &= 2(px_1 - 2)x_1 + x_2^2\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)} = 2\left[p(\frac{2}{p} - \frac{3}{p^2}) - 2\right](\frac{2}{p} - \frac{3}{p^2}) + \frac{4}{p^2} = -\frac{8}{p^2} + \frac{18}{p^3}. \end{aligned}$$

b) A döntési változók érzékenységvizsgálata:
A vonatkozó tétel értelmében

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp}\mathbf{x} &= -\mathbf{H}^{-1} \cdot \frac{d}{dp}\boldsymbol{\nabla} f = -\begin{bmatrix} \frac{1}{2p^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2p} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dp}\begin{bmatrix} 2p(px_1 - 2) + 6 \\ 2px_2 - 4 \end{bmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)} = \\ &= -\begin{bmatrix} \frac{1}{2p^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2p} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4px_1 - 4 \\ 2x_2 \end{bmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(p)} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{2p^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2p} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 - \frac{12}{p} \\ \frac{4}{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{p^2} + \frac{6}{p^3} \\ -\frac{2}{p^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Végezetül a burkolótétel elnevezésével kapcsolatban végezzünk ellenőrzést. Legyen például $p' = 1$, ekkor az optimális megoldás: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ és az optimális célfüggvényérték: $f(\mathbf{x}(p'), p) = (-p - 2)^2 + 4p - 14$. Az $f(\mathbf{x}(p'), p)$ függvény p szerinti deriváltja

$\frac{d}{dp}f(\mathbf{x}(p'), p) = 2p + 8$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $f(\mathbf{x}(p'), p)$ és a $M(p)$ függvények függvényértékei és a deriváltjaik értékei a $p = p'$ helyen megegyeznek, azaz

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}(p'), p)\Big|_{p=1} &= M(p)\Big|_{p=1} = -1, \\
\frac{d}{dp}f(\mathbf{x}(p'), p)\bigg|_{p=1} &= \frac{d}{dp}M(p)\bigg|_{p=1} = 10.
\end{aligned}
$$

3.4. Többparaméteres érzékenységvizsgálat

A többparaméteres optimalizációs feladat a következő:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_k) \to \min!$$

Az egyparaméteres esethez hasonlóan számíthatjuk a paraméterek megváltozásának hatását az optimum érték függvényre és a döntési változók optimális értékeire. Ahány paraméter van, annyi deriváltat határozhatunk meg. Az összefüggés rövidebb leírásához célszerű bevezetni a $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ és az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektor jelöléseket, ekkor a célfüggvény $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$

A célfüggvény érzékenységvizsgálata (burkolótétel) több paraméter esetén:

$$\frac{\partial M(\mathbf{p})}{\partial p_j} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial p_j}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{p})} \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

A döntési változók érzékenységvizsgálata több paraméter esetén:

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\mathbf{x}(\mathbf{p}) = -\Big[\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{p})\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{p})}\Big]^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial p_j}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p})\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{p})} \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Amennyiben a $\frac{\partial}{\partial p_j}\mathbf{x}(\mathbf{p})$ vektorokat egy $\mathbf{X}$ mátrix oszlopaiba, a $\frac{\partial}{\partial p_j}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p})\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{p})}$ vektorokat pedig egy $\mathbf{F}$ mátrix oszlopaiba helyezzük, úgy a fenti formula az alábbi egyszerűbb alakban is írható:

$$\mathbf{X} = -\mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{F},$$

ahol $x_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j}$ és $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial p_j}$.