# HIPERBOLIKUS PROGRAMOZÁS

Dr. Nagy Tamás
egyetemi docens

Miskolci Egyetem

Alkalmazott Matematikai Tanszék

# Tartalomjegyzék

# 1. A hiperbolikus programozási feladat megfogalmazása

Hiperbolikus programozási feladatnak, vagy más elnevezéssel lineáris tört programozási feladatnak nevezzük az olyan optimalizálási feladatot, amelyben a feltételek lineárisak, a célfüggvény pedig egy olyan törtfüggvény, amelynek a számlálója is és a nevezője is lineáris függvény. A műszaki és a gazdasági feladatokban sokszor előfordulnak azok az optimalizálási modellek, amikor valamilyen hatékonysági mutatószámot (pl. termelékenység, egységnyi ráfordításra jutó teljesítmény, egységnyi nyereségre jutó ráfordítás, stb.) akarunk optimalizálni. Akkor is ilyen feladatot kapunk, ha egy bizonyos mennyiségnek az átlagát akarjuk optimalizálni. A hiperbolikus programozási feladat standard alakja a következő:

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} &= \mathbf{b}\\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}\\ f(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{cx}+\alpha}{\mathbf{dx}+\beta} \to \min!\end{aligned}$$

ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ adottak, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a programozási feladat döntési változója. Jelölje $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$ a lehetséges megoldások halmazát. Tegyük fel, hogy a célfüggvény nevezője nem zérus ($\mathbf{dx} + \beta \neq 0$) a $P$ feltételi halmaz pontjaiban.

**Megjegyzések**:
Ha $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ és $\beta = 1$, akkor a lineáris programozási feladatot kapjuk. Az $\alpha$ ekkor egy konstans a célfüggvényben, amely optimalizálás szempontjából érdektelen.

A **hiperbolikus** elnevezés abból a tényből adódik, hogy **egyváltozós** esetben az $f(x) = \frac{cx+\alpha}{dx+\beta}$ célfüggvény képe egy hiperbola.

# 2. A célfüggvény vizsgálata

A $P$ feltételi halmazról eddigi tanulmányaink során sok ismeretet szereztünk, hiszen az egy konvex poliéder. Vizsgáljuk meg azonban a célfüggvényt. Az eredményeket az itt szereplő konvex poliédernél általánosabb halmazokra, pontosabban konvex halmazra ismertetjük és az alábbi állításokban közöljük.

**1. állítás**
Legyen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz. Ha $\mathbf{dx} + \beta \neq 0$ minden $\mathbf{x} \in S$ esetén, akkor a $\mathbf{dx} + \beta$ lineáris függvény az $S$ konvex halmaz minden pontjában azonos előjelű, azaz vagy $\mathbf{dx}+\beta > 0$ vagy $\mathbf{dx} + \beta < 0$ minden $\mathbf{x} \in S$ vektorra.

**Bizonyítás**
Tegyük fel az ellenkezőjét, azaz van olyan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$, hogy $\mathbf{dx}_1 + \beta > 0$ és $\mathbf{dx}_2 + \beta < 0$. Ekkor az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ pontokat összekötő szakasznak biztosan van olyan pontja, ahol a lineáris függvény, mint folytonos függvény értéke zérus. Tehát ellentmondásra jutottunk. **Q.e.d.**

**2. állítás**
Legyen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz. Legyen az

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{cx}+\alpha}{\mathbf{dx}+\beta}$$

függvény olyan, hogy $\mathbf{dx}+\beta \neq 0$ minden $\mathbf{x} \in S$ vektorra. Ekkor az $f(\mathbf{x})$ lineáris törtfüggvény szigorúan kvázikonvex is és szigorúan kvázikonkáv is az $S$ halmazon.

**Bizonyítás**

Először a szigorú kvázikonvexitást bizonyítjuk. Mint ismeretes egy $f(\mathbf{x})$ függvény akkor szigorúan kvázikonvex, ha minden $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ vektorra és minden $\lambda \in (0,1)$ számra igaz, hogy

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) < \max\{f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2)\}.$$

Alkalmazva a definíciót a lineáris törtfüggvényre, az alábbi egyenlőtlenséget kell belátni

$$\frac{\mathbf{c}(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) + \alpha}{\mathbf{d}(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) + \beta} < \max\left\{\frac{\mathbf{cx}_1 + \alpha}{\mathbf{dx}_1 + \beta}, \frac{\mathbf{cx}_2 + \alpha}{\mathbf{dx}_2 + \beta}\right\}.$$

Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy az $\mathbf{x}_1$ pontbeli törtfüggvény a nagyobb, azaz

$$\frac{\mathbf{cx}_1 + \alpha}{\mathbf{dx}_1 + \beta} > \frac{\mathbf{cx}_2 + \alpha}{\mathbf{dx}_2 + \beta}.$$

A kvázikonvexitásra vonatkozó egyenlőtlenség baloldalát átrendezve és a jobboldalán a fenti feltételezést alkalmazva:

$$\frac{\lambda(\mathbf{cx}_1 + \alpha) + (1-\lambda)(\mathbf{cx}_2 + \alpha)}{\lambda(\mathbf{dx}_1 + \beta) + (1-\lambda)(\mathbf{dx}_2 + \beta)} < \frac{\mathbf{cx}_1 + \alpha}{\mathbf{dx}_1 + \beta}.$$

Az 1. állításunk alapján az általánosság megsértése nélkül feltehető az is, hogy $\mathbf{dx} + \beta > 0$ minden $\mathbf{x} \in S$ esetén. Szorozhatunk tehát a nevezőkkel, a szorzás és az egyszerűsítés után az alábbi egyenlőtlenség adódik

$$(\mathbf{cx}_2 + \alpha)(\mathbf{dx}_1 + \beta) < (\mathbf{cx}_1 + \alpha)(\mathbf{dx}_2 + \beta),$$

ez pedig igaz, mivel az osztás elvégzése után a feltételezésünket kapjuk.

A célfüggvény szigorú kvázikonkávitásának bizonyítása hasonlóan történik, ennek elvégzését az olvasóra bízzuk. **Q.e.d.**

**3. állítás**

Tekintsük az alábbi hiperbolikus programozási feladatot

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Ax} & = & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geqq & \mathbf{0} \\ \dfrac{\mathbf{cx} + \alpha}{\mathbf{dx} + \beta} & \rightarrow & \text{min! (max!)} \end{array}$$

Tegyük fel, hogy a $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$ konvex poliéder **korlátos** (konvex politop, kompakt poliéder). Ekkor a tört célfüggvény felveszi optimumát (minimumát is és maximumát is) a $P$ konvex politop valamely extremális pontjában.

**Bizonyítás**

A bizonyításban csupán hivatkozni fogunk a kvázikonvex függvényeket tárgyaló tananyagra, azon belül is arra a tételre, amely a kvázikonvex függvény konvex poliéderen történő optimalizálásáról szólt. E tétel szerint egy **folytonos kvázikonvex** függvény felveszi **maximumát** a kompakt poliéder valamely **extremális pontjában**. Természetesen szigorúan kvázikonvex függvényre is igaz az állítás. A hiperbolikus programozási feladat célfüggvénye folytonos **szigorú kvázikonvex** függvény, feltételi halmaza pedig a feltételezés szerint kompakt poliéder. A hivatkozott tétel alapján a **maximum** feladatra bizonyítottuk az állítást.

A hivatkozott tételnek a tananyagban nem közölt (de egyszerűen belátható) változata szerint **folytonos kvázikonkáv** függvény felveszi **minimumát** a kompakt poliéder valamely **extremális pontjában**. Mivel a 2. állítás szerint a célfüggvény szigorúan kvázikonkáv is egyben, így minimum feladat esetére is bizonyított az állítás. **Q.e.d.**

Mint láttuk, az a megkötés, hogy a célfüggvény nevezője ne legyen zérus azt jelenti, hogy a célfüggyvény értéke vagy pozitív vagy negatív értékű minden lehetséges megoldás esetén. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy a nevező pozitív a megoldási halmazon, azaz $\mathbf{dx} + \beta > 0$ minden $\mathbf{x} \in P$ esetén. Amennyiben $\mathbf{dx} + \beta < 0$, úgy a célfüggvény számlálóját és nevezőjét is $(-1)$-el beszorozva, a feltételezett esetet kapjuk. A továbbiakban azt is mindig feltesszük, hogy a $P$ korlátos halmaz, tehát konvex politop.

Összefoglalva, a hiperbolikus programozási feladatnál két feltevéssel élünk:
1. A célfüggvény nevezője a $P$ feltételi halmazon ne legyen nulla.
2. A $P$ feltételi halmaz korlátos legyen.

A következőkben megvizsgáljuk, hogyan lehet eldönteni, hogy egy adott feladatnál teljesülnek-e ezek a kikötések?

1. A nevező vizsgálatát úgy szoktuk végezni, hogy a nevezőre vonatkozó minimum és maximum feladatokat külön-külön megoldjuk, azaz az alábbi lineáris programozási feladatokat kell megoldani:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{dx} + \beta &\rightarrow \text{min!} \\ \mathbf{dx} + \beta &\rightarrow \text{max!} \end{aligned}$$

Legyenek a célfüggvények optimális értékei $nv_{\min}$, ill. $nv_{\max}$. Ha $nv_{\min} \cdot nv_{\max} > 0$, akkor a nevező vagy pozitív vagy negatív előjelű a feltételi halmaz minden pontjában. Ha mindkét érték pozitív, akkor a nevező pozitív, ha mindkét érték negatív, akkor a nevező negatív előjelű.

2. A feltételi halmaz korlátosságának vizsgálatát úgy szoktuk végezni, hogy megoldjuk az alábbi lineáris programozási feladatot:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n &\rightarrow \text{max!} \end{aligned}$$

Ha a célfüggvény maximális értéke véges, akkor a $P$ feltételi halmaz korlátos.

Megjegyezzük, hogy nagyon sok esetben (ld. a példákban) egyszerűen el lehet dönteni, hogy a kikötések teljesednek-e.

# 3. Megoldási módszerek

## 3.1. Martos módszer

A hiperbolikus programozási feladat megoldására több módszert is kidolgoztak. MARTOS BÉLA közgazdász, matematikus által 1960-ban kidolgozott módszer a 3. állításban megfogalmazott tényt használja fel. A Martos-módszer a szimplex módszer logikáját követi, azaz csúcspontról csúcspontra haladva jut el az optimális megoldáshoz. A szimplex táblázatban két vizsgálósort alkalmaz a célfüggvény számlálójának és a nevezőjének megfelelően. A belépési kritérium a tört célfüggvény miatt bonyolultabb a szimplex módszerénél, a kilépési kritérium ugyanúgy a hányados kritérium. A belépési kritériumhoz minden oszlopra egy $2 \times 2$-es determinánst kell kiszámolni, amelyben szereplő négy szám az adott oszlop két vizsgálósorbeli adata és a megoldásoszlop két adata (célfüggvény számlálója és nevezője).

**A belépési kritérium vizsgálata**:

Tekintsük az alábbi megengedett (2. fázisbeli) szimplex táblát, amelyben a $p > 0$ a pivotelemet jelöli. A megoldásoszlopban lévő $z_S$ és $z_N$ adat a célfüggvény számlálójának, ill. nevezőjének értékét jelenti. A pivotoszlopban lévő $a$ és $b$ adat pedig a célfüggvény számlálójához, ill. nevezőjéhez tartozó vizsgálósorbeli adatok.

| | |
|---|---|
| $\boxed{p}$ | $x_r$ |
| $a$ | $z_S$ |
| $b$ | $z_N$ |

Ha elvégezzük a pivotálást a $p$ pivotelemmel, akkor a célfüggvény számlálójának és nevezőjének új értékei ($\bar{z}_S, \bar{z}_N$) a pivotálási képletek szerint az alábbiak lesznek:

$$\begin{aligned} \bar{z}_S &= z_S - \frac{a \cdot x_r}{p} \\ \bar{z}_N &= z_N - \frac{b \cdot x_r}{p} \end{aligned}$$

A Martos módszerben azt akarjuk, hogy a tört célfüggvény értéke ne romoljon (csökkenjen vagy azonos szinten maradjon), képletben:

$$\frac{\bar{z}_S}{\bar{z}_N} \leqq \frac{z_S}{z_N}.$$

A pivotálási képletekkel ez az alábbiak szerint írható:

$$\frac{z_S - \frac{a \cdot x_r}{p}}{z_N - \frac{b \cdot x_r}{p}} \leqq \frac{z_S}{z_N}$$

Mivel a régi és az új nevező sem lehet zérus, így mindkét oldal beszorozható, majd rendezés után az alábbi adódik:

$$a \cdot z_N \geqq b \cdot z_S$$

Ahhoz, hogy a célfüggvény határozottan javuljon (csökkenjen), a vizsgálósor négy adatára fenn kell állnia, hogy

$$a \cdot z_N - b \cdot z_S > 0.$$

Ezt az összefüggést pedig a legegyszerűbben úgy lehet megjegyezni, hogy tekintjük a négy adatból az alábbi determinánst:

$$\begin{vmatrix} a & z_S \\ b & z_N \end{vmatrix}.$$

A belépési kritérium tehát a következő:

Abban az oszlopban kell választani pivotelemet, amelyikben a fentiekben leírt **determináns értéke pozitív**. Tehát a Martos módszer pivotoszlop választása hasonló a szimplex módszerhez.

Ha van zérus értékű determináns, akkor alternatív optimuma van a feladatnak.

**1. Példa**:

Adott az alábbi hiperbolikus programozási feladat:

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 \qquad\quad &\leqq 10 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\geqq 30 \\ -2x_1 - 2x_2 + \quad x_3 &= 12 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0 \\ \frac{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2}{x_1 + x_2 + x_3 + 6} &\to \max! \end{aligned}$$

**Megoldás**:

Mielőtt a számszerű megoldásba belekezdenénk, megvizsgáljuk a célfüggvény nevezőjének előjelét és a konvex poliéder korlátosságát.

A nevező minden lehetséges megoldásra pozitív, sőt nagyobb, mint 6, hiszen a változók nemnegatívok.

A feltételi halmaz korlátossága is azonnal látszik, az első feltétel alapján a változók egy felső korlátja kiolvasható: $0 \leqq x_1 \leqq 10$, $0 \leqq x_2 \leqq 10$. E téglalap tartomány korlátos és a feltételi halmaz ennek részhalmaza, ami már bizonyíték a feltételi halmaz korlátosságára.

**Standard feladat felírása**:

A szimplex módszerhez hasonlóan új nemnegatív változók bevezetésével standard alakra kell hozni a feladatot. A célfüggvényt (pontosabban a számlálóját (-1)-el szorozva kapjuk a minimum feladatot, amely a következő:

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 \qquad\quad + u_1 \qquad &= 10 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \qquad - v_2 &= 30 \\ -2x_1 - 2x_2 + \quad x_3 \qquad\qquad &= 12 \\ x_1, x_2, x_3, u_1, v_2 &\geqq 0 \\ \frac{-2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2}{x_1 + x_2 + x_3 + 6} &\to \min! \end{aligned}$$

**1. fázis**:

Ebben a fázisban a konvex poliéder egy extremális pontját (az egyenletrendszer egy nemnegatív bázismegoldását) határozzuk meg. Ehhez az $u^*$ változók bevezetésével nyert segédfeladatot kell megoldani. A segédfeladat vizsgálósora a szimplex tábla utolsó sora.

A táblázatban, a szimplex módszerhez hasonlóan, az 1. fázisban is szerepeltethetjük a célfüggvényt. Itt külön a számlálónak, külön a nevezőnek lesz egy sora (alulról a 2. a nevezőé, a 3. a számlálóé). Mind a számláló, mind a nevező együtthatóit ellenkező előjellel kell beírni a táblázatba, a konstans tagokat pedig a megoldásoszlopba változatlanul kell beírni, ekkor működik megfelelően a belépési kritérium (determináns szabály).

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $v_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 10 |
| $u_2^*$ | 4 | 3 | $\boxed{3}$ | -1 | 30 |
| $u_3^*$ | -2 | -2 | 1 | 0 | 12 |
| | 2 | 1 | 3 | 0 | -2 |
| | -1 | -1 | -1 | 0 | 6 |
| | 2 | 1 | 4 | -1 | 42 |

| | $x_1$ | $x_2$ | $u_2^*$ | $v_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 10 |
| $x_3$ | $\frac{4}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 10 |
| $u_3^*$ | $-\frac{10}{3}$ | -3 | $-\frac{1}{3}$ | $\boxed{\frac{1}{3}}$ | 2 |
| | -2 | -2 | -1 | 1 | -32 |
| | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 16 |
| | $-\frac{10}{3}$ | -3 | $-\frac{4}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 2 |

| | $x_1$ | $x_2$ | $u_2^*$ | $u_3^*$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 10 |
| $x_3$ | -2 | -2 | 0 | 1 | 12 |
| $v_2$ | -10 | -9 | -1 | 3 | 6 |
| | 8 | 7 | 0 | -3 | -38 |
| | -3 | -3 | 0 | 1 | 18 |
| | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 |

Vége az 1. fázisnak. Az extremális pont: $\mathbf{x} = (0, 0, 12)$, a célfüggvény érték: $\frac{-38}{18}$.

**Második fázis:**

A táblázat utolsó sorát elhagyjuk. Az $u_2^*, u_3^*$ változók oszlopát is elhagyhatjuk, mivel ezek nem játszanak olyan szerepet (érzékenységvizsgálat), mint a szimplex módszernél.

| | $x_1$ | $x_2$ | |
|---|---|---|---|
| $u_1$ | $\boxed{1}$ | 1 | 10 |
| $x_3$ | -2 | -2 | 12 |
| $v_2$ | -10 | -9 | 6 |
| | 8 | 7 | -38 |
| | -3 | -3 | 18 |

A belépési kritériumhoz szükséges determinánsok:

Az $x_1$ változónál a determináns: $\begin{vmatrix} 8 & -38 \\ -3 & 18 \end{vmatrix} = 30,$

az $x_2$ változónál a determináns: $\begin{vmatrix} 7 & -38 \\ -3 & 18 \end{vmatrix} = 12.$

Mivel mindkettő pozitív, így mindegyik oszlop választható pivotoszlopnak, válasszuk az $x_1$ oszlopát, azaz vigyük bázisba az $x_1$ változót. A bázisból kijövő változó a hányados kritérium alapján az $u_1$. Elvégezve a pivotálást, az új szimplex tábla az alábbi:

| | $u_1$ | $x_2$ | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1 | 10 |
| $x_3$ | 2 | 0 | 32 |
| $v_2$ | 10 | 1 | 106 |
| | -8 | -1 | -118 |
| | 3 | 0 | 48 |

Az $u_1$ változónál a determináns: $\begin{vmatrix} -8 & -118 \\ 3 & 48 \end{vmatrix} = -30$,

az $x_2$ változónál a determináns: $\begin{vmatrix} -1 & -38 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = -18$.

Mivel mindkettő negatív, így a szimplex tábla optimális.

Az optimális megoldás, amely a lehetséges tartomány egy extremális pontja (csúcspontja):

$$x_1 = 10,\ x_2 = 0,\ x_3 = 32,\ z_{\min} = \frac{-118}{48},\ z_{\max} = \frac{118}{48}.$$

## 3.2. Megoldás lineáris programozással

### 3.2.1. A lineáris programozási feladat megfogalmazása

A következőkben azt a módszert ismertetjük, amely a hiperbolikus programozási feladat megoldását lineáris programozási feladat megoldására vezeti vissza. A módszert amerikai módszernek vagy a két kifejlesztőjéről Charnes-Cooper módszernek is nevezik. A lineáris programozási feladatot egy új változó és egy új feltétel bevezetésével kapjuk meg. Szorozzuk be a feltételeket, valamint a célfüggvény számlálóját és nevezőjét is egy pozitív $t$ új ismeretlennel. Ekkor az alábbi feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}t - \mathbf{b}t &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \\ t &> 0 \\ \frac{\mathbf{c}\mathbf{x}t + \alpha t}{\mathbf{d}\mathbf{x}t + \beta t} &\to \text{min!} \end{aligned}$$

A nevező pozitivitása miatt $\mathbf{d}\mathbf{x}t + \beta t > 0$. A $t$ új ismeretlen értéke legyen olyan, hogy az új nevező értéke minden $\mathbf{x}$ megoldásra 1 legyen, azaz $\mathbf{d}\mathbf{x}t + \beta t = 1$. Tehát az új célfüggvény értéke a számláló értékével azonos lesz. Ezzel elértük azt, hogy az új feladat célfüggvényében nem szerepel nevező, igaz a feltételek száma és a változók száma eggyel nőtt. Az új feladatban a változók szorzatai is szerepelnek, így még nem lineáris a feladat. Könnyen belátható, ha az $\mathbf{x}$ változót az $\mathbf{z} = \mathbf{x}t$ változóval helyettesítjük, akkor már lineáris programozási feladatot nyerünk, amely az alábbi:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\mathbf{z} + \beta t &= 1 \\ \mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{b}t &= \mathbf{0} \\ \mathbf{z} &\geqq \mathbf{0} \\ t &\geqq 0 \\ \mathbf{c}\mathbf{z} + \alpha t &\to \text{min!} \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a feltételekben a $t$ változónál megengedtük a zérus értéket. A nevező pozitivitása miatt $t$ értéke csak pozitív lehet, az egyenlőség felvétele tehát a lineáris programozásnál megszokott előjelkötés miatt csupán formális. A $t = 0$ azért sem lehet, mert ekkor az első feltétel ($\mathbf{dz} = 1$) miatt $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, a második feltétel és a nemnegativitás miatt $\mathbf{Az} = \mathbf{0}, \mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$. Ismeretes, hogy az ilyen $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ vektor a konvex poliéder egy **iránya**, ami a korlátosságnak ellentmond.

### 3.2.2. A hiperbolikus programozási feladat duál feladata

Most röviden ismertetjük a hiperbolikus programozási feladat duál feladatát. Legyen a duál változó az $y_0 \in \mathbb{R}$ skalár és az $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ vektor, ekkor a duál feladat a következő:

$$\begin{aligned} \mathbf{yA} + y_0\mathbf{d} &\leqq \mathbf{c} \\ -\mathbf{yb} + y_0\beta &= \alpha \\ y_0 &\rightarrow \max! \end{aligned}$$

Mint látható a hiperbolikus programozási feladat duál feladata egy lineáris programozási feladat. A $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ és $\beta = 1$ esetén valóban kiadódik a lineáris programozási feladat standard duál feladata. Jelölje $D = \{(y_0, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{1+m} : \mathbf{yA} + y_0\mathbf{d} \leqq \mathbf{c},\ -\mathbf{yb} + y_0\beta = \alpha\}$ a duál lehetséges megoldások halmazát.

Az alábbiakban a primál és a duál feladat lehetséges megoldásaihoz tartozó célfüggvényértékek közötti összefüggést, az ún. alaplemmát ismertetjük.

**HIPERBOLIKUS PROGRAMOZÁS ALAPLEMMÁJA:**

Ha $\mathbf{x} \in P$ és $(y_0, \mathbf{y}) \in D$ lehetséges primál és duál megoldások, akkor a célfüggvényértékek között a

$$\frac{\mathbf{cx} + \alpha}{\mathbf{dx} + \beta} \geqq y_0$$

összefüggés áll fenn.

**Bizonyítás**

Induljunk ki az egyenlőtlenséges duál feltételből és szorozzuk be az $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ vektorral, ekkor kapjuk, hogy

$$\mathbf{yAx} + y_0\mathbf{dx} \leqq \mathbf{cx},$$

majd felhasználva a vektor-mátrix szorzás asszociativitását és az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ primál feltételt

$$\mathbf{yb} + y_0\mathbf{dx} \leqq \mathbf{cx}$$

adódik. Az egyenlőséges duál feltételt felhasználva és rendezés után adódik, hogy

$$y_0\mathbf{dx} + y_0\beta \leqq \mathbf{cx} + \alpha,$$

amelyből $y_0$ kiemelésével és a $\mathbf{dx} + \beta > 0$ mennyiséggel való osztással megkapjuk a lemma állítását. **Q.e.d.**

**Megjegyzés**:

A hiperbolikus programozási feladat duál feladata nem más, mint a hiperbolikus programozási feladathoz az előzőekben bemutatott módon hozzárendelt **lineáris programozási**

**feladat duál feladata**. Javasoljuk az olvasónak, hogy írja fel a közölt lineáris programozási feladat duál feladatát. Azt fogja tapasztalni, hogy az egyenlőség helyett egyenlőtlenség áll. Valójában ezt is használhatnánk duál feladatként, de tudjuk, hogy a $t$ változó nem lehet zérus és ezt a tény kihasználva írható az egyenlőség.

### 3.2.3. A hiperbolikus programozási feladat érzékenységvizsgálata

A duál feladat $y_1, y_2, \ldots, y_m$ változóinak optimális megoldását a hiperbolikus programozási feladat érzékenységvizsgálatához felhasználhatjuk. A következőt mondhatjuk:

Ha a hiperbolikus programozási feladat $i$-edik feltétele nagyon kis $\varepsilon$ értékkel megváltozik, akkor a tört célfüggvény optimális értéke megközelítőleg $y_i(t\varepsilon)$ értékkel változik meg.

Az alábbiakban egy szöveges példán szemléltetjük a Charnes-Cooper módszert és az érzékenységvizsgálatot. A legtöbb gyakorlati feladat nem standard típusú hiperbolikus feladat, lehetnek egyenlőtlenséges feltételek is és a tört célfüggvény maximumát keresünk. A nem standard feladatot első lépésben standard alakká kell transzformálni. A példamegoldáshoz néhány javaslatot teszünk:

A hiperbolikus programozási feladat feltételeitől függetlenül mindig **legalább egy egyenlőséges** feltétele (nevezőből adódó) lesz a lineáris programozási feladatnak, így az első fázisra is szükség van. Célszerű ezt az egyenletet az első feltételként szerepeltetni és a bevezetett mesterséges hiányváltozót $u_0^*$ szimbólummal jelölni.

A $\geqq$ típusú feltételeket érdemes beszorozni $(-1)$-el, így a $v$ feleslegváltozó helyett $u$ hiányváltozót használhatunk. Ezeknek az $u$ változóknak az indexe az eredeti feltétel sorszámára fog utalni. A dualitásból következik, hogy a Charnes-Cooper módszerrel a duál feladat optimális megoldása is meghatározható.

**2. Példa**:

Egy üzemben két terméket gyártanak két erőforrás igénybevételével. A termelés során a termékek egységének megmunkálási költsége rendre 2, 5 pénzegység. A termékek szerelési költsége rendre 1, 2 pénzegység. A termékek eladási egységára várhatóan rendre 3, 9 pénzegység. A két termékből összesen legalább 60 darabot akarunk előállítani. Azt szeretnénk, hogy a szerelési költség legfeljebb 80 pénzegység legyen. A termékmennyiségtől független költség 10 pénzegység és ezt a megmunkálási költségnél vesszük figyelembe. Határozza meg azt a termékösszetételt, amelynél az egységnyi megmunkálási költségre eső árbevétel maximális!

**Megoldás**:

Először fogalmazzuk meg a feladatot matematikai formában. Legyen a feladat döntési változója a gyártandó termékmennyiség, jelölje ezeket $x_1, x_2$. Az alábbi hiperbolikus programozási feladatot kaptuk:

$$\begin{aligned} x_1 + \phantom{2}x_2 &\geqq 60 \\ x_1 + 2x_2 &\leqq 80 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \\ \frac{3x_1 + 9x_2}{2x_1 + 5x_2 + 10} &\rightarrow \text{max!} \end{aligned}$$

A nevező minden lehetséges megoldásra pozitív, sőt nagyobb, mint 10, hiszen a változók nemnegatívok.

A feltételi halmaz korlátossága is látszik, a második feltétel alapján a változók egy felső korlátja kiolvasható: $0 \leqq x_1 \leqq 80,\ 0 \leqq x_2 \leqq 40$. E téglalap tartomány korlátos és a feltételi halmaz ennek részhalmaza, ami már bizonyíték a feltételi halmaz korlátosságára.

A formális beszorzások és az $z_i = x_i t$ $(i = 1, 2)$ helyettesítés után a lineáris programozási feladat az alábbi:

$$\begin{aligned} 2z_1 + 5z_2 + 10t &= 1 \\ z_1 + \phantom{5}z_2 - 60t &\geqq 0 \\ z_1 + 2z_2 - 80t &\leqq 0 \\ z_1, z_2, t &\geqq 0 \\ 3z_1 + 9z_2 &\to \text{max!} \end{aligned}$$

Mint tudjuk ennek a feladatnak a duálisa a hiperbolikus programozási feladat duál feladata, amely az alábbiak szerint írható (itt maximum feladat duálisát kell felírni):

$$\begin{aligned} 2y_0 + \phantom{60}y_1 + \phantom{80}y_2 &\geqq 3 \\ 5y_0 + \phantom{60}y_1 + \phantom{8}2y_2 &\geqq 9 \\ 10y_0 - 60y_1 - 80y_2 &= 0 \\ y_0 &\lesseqgtr 0 \\ y_1 &\leqq 0 \\ y_2 &\geqq 0 \\ y_0 &\to \text{min!} \end{aligned}$$

Mint említettük, célszerű a $z_1 + z_2 - 60t \geqq 0$ feltétel helyett a $-z_1 - z_2 + 60t \leqq 0$ feltételt használni, de vigyázzunk arra, hogy ekkor az $y_1$ duál változót ellenkező előjellel kell kiolvasni az optimális szimplex táblából.

Az induló szimplex táblázat az alábbi:

| | $z_1$ | $z_2$ | $t$ | |
|---|---|---|---|---|
| $u_0^*$ | 2 | 5 | 10 | 1 |
| $u_1$ | -1 | -1 | 60 | 0 |
| $u_2$ | $\boxed{1}$ | 2 | -80 | 0 |
| | 3 | 9 | 0 | 0 |
| | 2 | 5 | 10 | 1 |

A további szimplex táblázatok a következők:

| | $u_2$ | $z_2$ | $t$ | |
|---|---|---|---|---|
| $u_0^*$ | -2 | 1 | 170 | 1 |
| $u_1$ | 1 | $\boxed{1}$ | -20 | 0 |
| $z_1$ | 1 | 2 | -80 | 0 |
| | -3 | 3 | 240 | 0 |
| | -2 | 1 | 170 | 1 |

| | $u_2$ | $u_1$ | $t$ | |
|---|---|---|---|---|
| $u_0^*$ | -3 | -1 | $\boxed{190}$ | 1 |
| $z_2$ | 1 | 1 | -20 | 0 |
| $z_1$ | -1 | -2 | -40 | 0 |
| | -6 | -3 | 300 | 0 |
| | -3 | -1 | 190 | 1 |

| | $u_2$ | $u_1$ | | $u_0^*$ |
|---|---|---|---|---|
| $t$ | $-\frac{3}{190}$ | $-\frac{1}{190}$ | $\frac{1}{190}$ | $\frac{1}{190}$ |
| $z_2$ | $\frac{130}{190}$ | $\frac{170}{190}$ | $\frac{20}{190}$ | $\frac{20}{190}$ |
| $z_1$ | $-\frac{310}{190}$ | $-\frac{420}{190}$ | $\frac{40}{190}$ | $\frac{40}{190}$ |
| | $-\frac{240}{190}$ | $-\frac{270}{190}$ | $-\frac{300}{190}$ | $-\frac{300}{190}$ |

Megkaptuk az optimális szimplex táblát, amelyből kiolvasható a lineáris programozási feladat optimális megoldása:

$$z_1 = \frac{40}{190}, \quad z_2 = \frac{20}{190}, \quad t = \frac{1}{190}, \quad z_{\max} = \frac{300}{190}.$$

A hiperbolikus programozási feladat optimális megoldása ($x_i = \frac{z_i}{t},\ i = 1,2$):

$$x_1 = 40, \qquad x_2 = 20, \qquad z_{\max} = \frac{300}{190}.$$

A hiperbolikus programozási feladat duál feladatának optimális megoldása:

$$y_1 = -\frac{270}{190}, \quad y_2 = \frac{240}{190}, \quad y_0 = \frac{300}{190}, \quad z_{\min} = y_0 = \frac{300}{190}.$$

**A duál változók értelmezése (érzékenységvizsgálat)**:

A darabszámra előírt 60-as alsó korlátnak nagyon kis $\varepsilon$ változása az egységnyi megmunkálási költségre eső árbevételben megközelítőleg $-\frac{270}{190}\frac{1}{190}\varepsilon$ változást eredményez. Ha növekszik a korlát, csökken a fajlagos árbevétel és fordítva, ha csökken a korlát, növekszik fajlagos árbevétel.

A szerelési költségre előírt 80-as felső korlátnak nagyon kis $\varepsilon$ változása az egységnyi megmunkálási költségre eső árbevételben megközelítőleg $\frac{240}{190}\frac{1}{190}\varepsilon$ változást eredményez. Ha növekszik a korlát, növekszik a fajlagos árbevétel és fordítva, ha csökken a korlát, csökken fajlagos árbevétel.

**Feladat**:

Oldja meg a 2. példát Martos módszerrel!

**3. példa**:

Oldjuk meg az 1. példát Charnes-Cooper módszerrel! A HP feladat:

$$\begin{aligned}
x_1 + \quad x_2 \qquad\quad &\leqq 10\\
4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\geqq 30\\
-2x_1 - 2x_2 + \quad x_3 &= 12\\
x_1, x_2, x_3 &\geqq 0\\
\frac{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2}{x_1 + x_2 + x_3 + 6} &\to \max!
\end{aligned}$$

**Megoldás**:

**1. fázis**:

Az LP feladat induló táblája egyszerűen felírható, anélkül, hogy felírnánk az LP feladatot. A nevezőt első feltételként szerepeltessük. A $\geqq$ feltételt szorozzuk be $(-1)$-el. A számlálónak pedig a maximumát keressük. Az induló tábla az alábbi:

| | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $t$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_0^*$ | 1 | 1 | 1 | 6 | 1 |
| $u_1$ | 1 | 1 | 0 | -10 | 0 |
| $u_2$ | -4 | -3 | -3 | 30 | 0 |
| $u_3^*$ | -2 | -2 | $\boxed{1}$ | -12 | 0 |
| | 2 | 1 | 3 | 2 | 0 |
| | -1 | -1 | 2 | -6 | 1 |

| | $z_1$ | $z_2$ | $u_3^*$ | $t$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_0^*$ | 3 | 3 | -1 | 18 | 1 |
| $u_1$ | $\boxed{1}$ | 1 | 0 | -10 | 0 |
| $u_2$ | -10 | -9 | 3 | -6 | 0 |
| $z_3$ | -2 | -2 | 1 | -12 | 0 |
| | 8 | 7 | -3 | 38 | 0 |
| | 3 | 3 | -2 | 18 | 1 |

| | $u_1$ | $z_2$ | $u_3^*$ | $t$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_0^*$ | -3 | 0 | -1 | $\boxed{48}$ | 1 |
| $z_1$ | 1 | 1 | 0 | -10 | 0 |
| $u_2$ | 10 | 1 | 3 | -106 | 0 |
| $z_3$ | 2 | 0 | 1 | -32 | 0 |
| | -8 | -1 | -3 | 118 | 0 |
| | -3 | 0 | -2 | 48 | 1 |

| | $u_1$ | $z_2$ | $u_3^*$ | $u_0^*$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | $-\frac{3}{48}$ | 0 | $-\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{48}$ |
| $z_1$ | $\frac{18}{48}$ | 1 | $-\frac{10}{48}$ | $\frac{10}{48}$ | $\frac{10}{48}$ |
| $u_2$ | $\frac{162}{48}$ | 1 | $\frac{38}{48}$ | $\frac{106}{48}$ | $\frac{106}{48}$ |
| $z_3$ | 0 | 0 | $\frac{16}{48}$ | $\frac{32}{48}$ | $\frac{32}{48}$ |
| | $-\frac{30}{48}$ | $-1$ | $-\frac{26}{48}$ | $-\frac{118}{48}$ | $-\frac{118}{48}$ |
| | 0 | 0 | $-1$ | $-1$ | 0 |

**2. fázis**:

A táblázat utolsó sorát elhagyjuk. Az $u_0^*, u_3^*$ változók oszlopát itt nem érdemes elhagyni, mert akkor az érzékenységvizsgálatot nem tudjuk elvégezni.

| | $u_1$ | $z_2$ | | $u_0^*$ | $u_3^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | $-\frac{3}{48}$ | 0 | $\frac{1}{48}$ | $\frac{1}{48}$ | $-\frac{1}{48}$ |
| $z_1$ | $\frac{18}{48}$ | 1 | $\frac{10}{48}$ | $\frac{10}{48}$ | $-\frac{10}{48}$ |
| $u_2$ | $\frac{162}{48}$ | 1 | $\frac{106}{48}$ | $\frac{106}{48}$ | $\frac{38}{48}$ |
| $z_3$ | 0 | 0 | $\frac{32}{48}$ | $\frac{32}{48}$ | $\frac{16}{48}$ |
| | $-\frac{30}{48}$ | $-1$ | $-\frac{118}{48}$ | $-\frac{118}{48}$ | $-\frac{26}{48}$ |

A szimplex tábla optimális, így vége az algoritmusnak.

A hozzárendelt LP feladat és duál feladatának optimális megoldása:

$$z_1 = \frac{10}{48},\ z_2 = 0,\ z_3 = \frac{32}{48},\ t = \frac{1}{48},\ z_{\min} = \frac{-118}{48},\ z_{\max} = \frac{118}{48},$$

$$y_1 = \frac{30}{48},\ y_2 = 0,\ y_3 = \frac{26}{48},\ y_0 = \frac{118}{48}.$$

A HP feladat optimális megoldása ($x_i = \frac{z_i}{t},\ i = 1, 2, 3$):

$$x_1 = 10,\ x_2 = 0,\ x_3 = 32,\ z_{\max} = \frac{118}{48}.$$

**A példabeli duál változók értelmezése (érzékenységvizsgálat)**:

Az első feltétel jobboldalának (10) nagyon kis $\varepsilon$ változása a célfüggvényben megközelítőleg $\frac{30}{48}\frac{1}{48}\varepsilon$ változást eredményez. Ha növekszik a jobboldal értéke, növekszik a célfüggvény értéke és fordítva, ha csökken a jobboldal értéke, csökken a célfüggvény értéke.

A második feltétel jobboldalának (30) nagyon kis $\varepsilon$ változása a célfüggvényben nem okoz változást. Megjegyezzük, hogy az $y_2$ duál változót a (-1)-el való beszorzás miatt ellenkező előjellel kell kiolvasni.

A harmadik feltétel jobboldalának (12) nagyon kis $\varepsilon$ változása a célfüggvényben megközelítőleg $\frac{26}{48}\frac{1}{48}\varepsilon$ változást eredményez. Ha növekszik a jobboldal értéke, növekszik a célfüggvény értéke és fordítva, ha csökken a jobboldal értéke, csökken a célfüggvény értéke.

**Feladat**:

Adott az alábbi hiperbolikus programozási feladat:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leqq 4 \\ 2x_1 + 5x_2 &\geqq 20 \\ 3x_1 - x_2 &\geqq 6 \\ x_1 + x_2 &\leqq 18 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \\ \frac{2x_1 - 3x_2 + 3}{x_1 + 2x_2 - 6} &\to \text{min!} \end{aligned}$$

a) A célfüggvény nevezője azonos előjelű-e a feltételi halmazon?
b) Korlátos-e a feltételi halmaz?
c) Írja fel a duál feladatot!
d) Oldja meg a hiperbolikus programozási feladatot
  - Martos módszerrel,
  - Charnes-Cooper módszerrel!
e) Értelmezze a duál változókat!

**Feladat**:

Adott az alábbi hiperbolikus programozási feladat:

$$\begin{aligned} x_1 + \phantom{5}x_2 &\leqq 10 \\ 3x_1 - 5x_2 &\leqq 6 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \\ \frac{5 - 8x_1 - 6x_2}{2x_1 - x_2 + 20} &\to \text{max!} \end{aligned}$$

a) A célfüggvény nevezője azonos előjelű-e a feltételi halmazon?
b) Korlátos-e a feltételi halmaz?
c) Írja fel a duál feladatot!
d) Oldja meg a hiperbolikus programozási feladatot
- Martos módszerrel,
- Charnes-Cooper módszerrel!
e) Értelmezze a duál változókat!

**Feladat**:
Adott az alábbi hiperbolikus programozási feladat:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 6x_3 &\leqq 20 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &\leqq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0 \\ \frac{x_1 + 3x_2 + x_3 - 1}{2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1} &\rightarrow \max! \end{aligned}$$

a) A célfüggvény nevezője azonos előjelű-e a feltételi halmazon?
b) Korlátos-e a feltételi halmaz?
c) Írja fel a duál feladatot!
d) Oldja meg a hiperbolikus programozási feladatot
- Martos módszerrel,
- Charnes-Cooper módszerrel!
e) Végezzen érzékenységvizsgálatot!