JÁTÉKELMÉLET

Dr. Nagy Tamás
egyetemi docens

Miskolci Egyetem

Alkalmazott Matematikai Tanszék

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Matematikai szempontból kétféle játékot különböztetünk meg: **szerencsejátékokat** és **stratégiai** játékokat. A két játékot az különbözteti meg egymástól, hogy a játékban szereplő egyedeknek (játékosoknak, döntéshozóknak) a játék kimenetére a fennálló szabályok keretein belül van-e befolyásuk vagy nincs. A szerencsejátékokban a játékosoknak a játék kimenetére semmiféle befolyásuk nincs. Ezeknek a játékoknak a matematikai elemzése már a reneszánsz korban megkezdődött és a valószínűségszámítás kialakulásához vezetett. Stratégiai játékoknak azokat a játékokat nevezzük, amelyekben a játékosoknak a játék kimenetelére befolyásuk van. A játékelmélet a stratégiai játékokkal foglalkozik. A stratégiai játékok elemzése a XX. században indult el, így a játékelmélet fiatal tudományágnak tekinthető. Érdemes megjegyezni, hogy a játékelmélet megalapozója a magyar származású NEUMANN JÁNOS (1903-1957) volt.

A stratégiai játékokban a játékosoknak az érdekei általában ellentétesek, ezek a játékok tehát mindig valamilyen konfliktushelyzetet jelentenek. A játékban résztvevők száma szerint megkülönböztetünk két-, három-, általában n-**személyes** játékokat. A játékosnak a játék kimenetelét befolyásoló tevékenységeit, döntéseit **stratégiáknak** nevezzük. A játékosok több stratégia közül választhatnak. A szóba jövő stratégiák összességét **stratégiahalmaznak** nevezzük.

A játék kimeneteleit minden játékos számára egy függvénnyel az ún. **kifizetőfüggvénnyel** jellemezhetjük. Minthogy a játék kimenetelét a játékosok által választott stratégiák határozzák meg, ezért az i-edik játékos esetében a kifizetőfüggvény jelölésére a $K_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ jelölést használjuk, ahol $s_i \in S_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ az i-edik játékos választott stratégiája, S_i pedig az i-edik játékos stratégiahalmaza. A kifizetőfüggvény értelmezési tartománya általában a stratégiahalmazok $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ direkt szorzata, értékkészlete pedig a valós számok valamilyen részhalmaza. A játék lehet **determinisztikus** és **sztochasztikus**, attól függően, hogy a játékosok által választott stratégiák a kifizetőfüggvények értékeit egyértelműen vagy bizonyos valószínűséggel határozzák meg.

A játékelméletben mindig feltételezzük, hogy minden játékos ismeri az összes többi játékos stratégiahalmazát és kifizetőfüggvényét. A játék során az egyes játékosok stratégiáikat egymástól függetlenül választják meg, azaz egyik játékos sem tudja előre, hogy a többi játékos az adott játékhoz stratégiahalmazából melyik stratégiát választja. Feltételezve azt, hogy a játék során a játékostársak jól fogják stratégiájukat megválasztani, akkor természetesnek mondható a játékosoknak biztonságra való törekvése a játék kimenetelét illetően. A játékosok biztonságra, egyensúlyhelyzetre való törekvése olyan stratégiák kiválasztását jelenti, amelynél jobbat egyik játékos sem választhat, feltéve, hogy a többi játékos az egyensúlyhelyzetnek megfelelő stratégiát játssza. Az egyensúlyhelyzetnek megfelelő stratégiákat **egyensúlyi stratégiáknak** nevezik. Az egyensúlyi stratégiák együttesére az **egyensúlypont** elnevezés is használatos. Az alábbiakban a játékelmélet alapfogalmát az egyensúlyi stratégiákat definiáljuk, amelyeket bevezetőjéről NASH-féle egyensúlypontnak is szoktak nevezni.

DEFINÍCIÓ (egyensúlypont):

Egy játék egyensúlypontján olyan $s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*$ stratégiákat értünk, amelyekre $i = 1, 2, ..., n$ esetén

$$K_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geqq K_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \tag{1}$$

minden $s_i \in S_i$ stratégiára fennáll.

A definícióban szereplő képletet **egyensúlyi összefüggésnek** is szokás nevezni. A fenti definíció azt fejezi ki, hogy egyik játékosnak sem érdeke az egyensúlyi, biztonsági stratégiájától eltérni, mivel akkor rosszabb helyzetbe kerülhet. Más szavakkal az egyensúlyi stratégiák melletti kifizetőfüggvény-érték nem növelhető egyik játékos esetében sem, ha a többi játékos az egyensúlyi stratégiákat játssza. Az egyensúlyi stratégiák játszása minden egyes játékos számára a racionálisan elvárható maximumot biztosítja. Ne feledkezzünk meg arról, hogy ez a maximum nem azt jelenti, hogy ennél jobbat nem lehet elérni valamilyen nem biztonsági stratégia mellett. Ezért a játékelméletben nem tanácsos az optimális stratégia használata.

A játékelmélet alapfeladata a fent definiált egyensúlypont, más szóval az egyensúlyi, biztonsági stratégiák együttesének meghatározása.

Az alábbiakban néhány alapfogalmat vezetünk be:

Ha létezik olyan c állandó, hogy minden $s_i \in S_i$ esetén $\sum_{i=1}^{n} K_i(s_1, s_2, \ldots, s_n) = c$, akkor a játékot **konstansösszegűnek** nevezzük. A $c = 0$ speciális esetben a játék **zérusösszegű**.

Az egyensúlyi stratégiákhoz tartozó kifizetőfüggvény-értékek összességét, azaz a
$K_i(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ értékeket a **játék értékének** nevezzük és $v_1, v_2, ..., v_n$-el (value=érték) jelöljük.

A gyakorlatban nagyon sok konfliktushelyzet kétszemélyes játékként modellezhető, ezért a tananyagban a **kétszemélyes**, **véges sok** stratégiahalmazzal rendelkező játékokkal foglalkozunk. A kétszemélyes, véges sok stratégiahalmazzal rendelkező játék táblázattal megadható, tehát a játékosok kifizetőfüggvénye egy-egy mátrixszal jellemezhető. Mivel a játék két mátrixszal megadható ezért a véges, kétszemélyes játékokat **bimátrix játékoknak** szokás nevezni. Az egyes játékosokat P_1 és P_2 (player=játékos) betűkkel jelöljük. A P_1 játékos stratégiáit a mátrix **soraival**, a P_2 játékos stratégiáit pedig a mátrix **oszlopaival** jellemezzük; a P_1 játékos kifizetőfüggvény-értékét az $\mathbf{A}$ mátrix elemei, a P_2 játékos kifizetőfüggvény-értékét pedig a $\mathbf{B}$ mátrix elemei adják. Ha egy bimátrixjáték zérusösszegű $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$, akkor a játékot **mátrixjátéknak** nevezzük. Ebben az esetben egyetlen mátrixszal jellemezhető a játék. A mátrixjátékok antagonisztikus helyzeteket írnak le. A játékosok érdekei a lehető legélesebben szembeállnak egymással, nyereségüket csak a másik rovására tudják növelni.

2. Mátrixjátékok

Mátrixjátékok alatt olyan **kétszemélyes**, **zérusösszegű** játékokat értünk, amelyekben a játékosoknak **véges sok** stratégiájuk van. Legyen a P_1 játékosnak m, a P_2 játékosnak pedig n stratégiája. A játékosok kifizetőfüggvény-értékeit, nyereségeit egy $\mathbf{A}$ mátrixszal jellemezzük és **kifizetőmátrixnak** vagy **kifizetési mátrixnak** nevezzük. A P_1 játékos stratégiáit az $\mathbf{A}$ mátrix **soraival**, a P_2 játékos stratégiáit pedig az $\mathbf{A}$ mátrix **oszlopaival** jellemezzük. **Állapodjunk** meg abban, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix elemei a P_1 **játékos nyereségét** jelentik. Mivel a játék zérusösszegű, így a P_2 játékos nyereségét az $\mathbf{A}$ mátrix elemeinek (-1)-szerese jelenti. Tehát az a_{ij} mátrixelem a P_1 játékos nyeresége, ill. a P_2 játékos vesztesége, ha a P_1 játékos az i-edik, a P_2 játékos pedig a j-edik stratégiáját játssza. Az $a_{ij} < 0$ természetesen a P_1 számára veszteséget, a P_2 számára pedig nyereséget jelent.

1. Példa
Két játékos az alábbi játékot játssza (Kétujjú Morra játéknak is nevezik):

Egyszerre feltartják egy vagy két ujjukat és egyidejűleg megnevezik, hogy ellenfelük hány ujját fogja felmutatni. Ha csak az egyik játékos találja el, hogy hány ujját mutatta fel a másik játékos, akkor ez a játékos a feltartott ujjak össz-számának megfelelő összeget nyeri az ellenfelétől. Ellenkező esetben nem nyer senki. Határozzuk meg a játékosok stratégiahalmazát és a játék mátrixát!

Megoldás:
Mindkét játékosnak négy cselekvési lehetősége, stratégiája van. Tehát a kifizetési mátrix 4×4-es lesz. Jelöljük ezeket a stratégiákat a (mutat, mond) szimbólummal, például az $(1, 2)$ stratégia azt jelenti, hogy a játékos 1-et mutat és 2-t mond. A játék mátrixa ezekután egyszerűen felírható. Célszerű a kifizetéseket először egy táblázatba foglalni, a táblázat sorai előtt, ill. az oszlopai felett lévő szimbólum az egyes játékosok stratégiáit jelentik. Például az a_{13} kifizetés azért egyenlő -3-mal, mert ekkor a P_1 játékos stratégiája $(1, 1)$, a P_2 játékos stratégiája pedig $(2, 1)$, így a P_1 játékos nem találta el, a P_2 játékos viszont eltalálta, hogy az ellenfele hány ujját mutatta fel. Tehát csak a P_2 talált, így ő nyert, ellenfele pedig veszített 3 egységet, hiszen a felmutatott ujjak összes száma 3 volt.

		P_2			
		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
	(1,1)	0	2	-3	0
P_1	(1,2)	-2	0	0	3
	(2,1)	3	0	0	-4
	(2,2)	0	-3	4	0

Ekkor a kifizetési mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1. Egyensúlyi, nyeregponti stratégia

Most elkezdjük a mátrixjáték megoldásának, azaz az egyensúlyi, biztonsági stratégiák meghatározásának tárgyalását. A tárgyalást egy példán keresztül végezzük a könnyebb érthetőség kedvéért. Legyen adott az alábbi **A** kifizetési mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 8 & 5 \\ 6 & 3 & 6 & 7 \\ 5 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

A játékelméleti bevezetőben általánosan definiáltuk a játékosok egyensúlyi stratégiáit (1). Ez a definíció a mátrixjáték esetében az alábbit jelenti. Jelöljük i^*-gal a P_1 játékos egyensúlyi stratégiáját, vagyis, hogy a P_1 játékos az i^*-gal jelölt sort, más szóval a sornak megfelelő stratégiát választja. A P_2 játékos egyensúlyi stratégiája pedig legyen j^*. Az (1) definíció értelmében a P_1 játékos azt az i^* sort választja, amely mellett a kifizetőfüggvény-értéke (nyeresége) a legnagyobb, feltéve, hogy ellenfele a P_2 játékos a j^* egyensúlyi stratégiáját választja; képletben kifejezve:

$$a_{i^*j^*} \geqq a_{ij^*} \qquad \text{minden } i \text{ stratégia esetén.}$$

Másképpen fogalmazva, ha a P_1 játékos eltér az i^* stratégiától, de a P_2 játékos nem tér el a j^* stratégiától, akkor P_1 rosszabbul járhat, így számára a legkedvezőbb az i^* stratégia. Az (1) definíció értelmében a P_2 játékos viszont azt a j^* oszlopot választja, amely mellett a saját kifizetőfüggvény-értéke (nyeresége) a legnagyobb, vagy más szavakkal a vesztesége a legkisebb feltéve, hogy ellenfele a P_1 játékos az i^* egyensúlyi stratégiáját választja; képletben kifejezve:

$$-a_{i^*j^*} \geqq -a_{i^*j} \quad \text{vagy egyszerűbben} \quad a_{i^*j^*} \leqq a_{i^*j} \quad \text{minden } j \text{ stratégia esetén.}$$

A fentieket összefoglalva közöljük a mátrixjáték egyensúlyi stratégiájának definícióját.

DEFINÍCIÓ (mátrixjáték egyensúlypontja):
Egy mátrixjáték egyensúlypontján olyan (i^*, j^*) stratégiapárt értünk, amelyre alábbi ún. **egyensúlyi összefüggés** minden (i, j) stratégiapárra fennáll:

$$a_{ij^*} \leqq a_{i^*j^*} \leqq a_{i^*j} \tag{2}$$

Ezen definíció szerint mátrixjáték esetén az (i^*, j^*) stratégiapár meghatározása azt jelenti, hogy meg kell keresni a kifizetőmátrix azon pontját, amely egyúttal a **sorának legkisebb** és az **oszlopának legnagyobb** eleme. Ez a pont egy nyeregfelület azon pontjaként fogható fel, amely az egyik irányban a legmélyebben, a másik irányban a legmagasabban helyezkedik el. Ezen geometriai analógia alapján szokás az egyensúlypontot **nyeregpontnak**, az egyensúlyi stratégiákat pedig **nyeregponti stratégiáknak** is nevezni.

A következő alfejezetben megmutatjuk hogyan lehet meghatározni a mátrix nyeregpontját, azaz az (i^*, j^*) egyensúlyi stratégiapárt. Nyilvánvaló, hogy leszámlálással is meg lehet határozni a nyeregpontot, mégpedig úgy, hogy végighaladunk a mátrix elemein és ellenőrizzük, hogy az elem egyben **sorminimum** és **oszlopmaximum**. Eszerint a fenti $\mathbf{A}$ kifizetési mátrix által jellemzett mátrixjáték nyeregpontja $i^* = 3,\ j^* = 2$, mert az a_{32} mátrixelem a sorának legkisebb és az oszlopának a legnagyobb eleme. Egy kicsit gyorsabban is elvégezhetjük a nyeregpont meghatározását, minden sorban megjelöljük a sor legkisebb elemét és minden oszlopban az oszlop legnagyobb elemét egy $*$ jellel. Azok a mátrixelemek (pontok) lesznek nyeregpontok, ahol két $*$ jel van.

Az alábbiakban egy általános elvet mutatunk meg a nyeregpont meghatározásra.

2.2. Maximin és minimax stratégiák

Mivel a játék zérusösszegű, így az ellenfelek csak egymástól nyerhetnek, ezért mindegyik számíthat a másik legjobb ellenlépésére. A játékosok nem vállalnak kockázatot a nagyobb nyereség reményében és az ellenfél hibáira sem spekulálnak, tehát biztonságra törekszenek. Képzeljük magunkat a P_1 játékos helyébe és próbáljuk meghatározni a számunkra legkedvezőbb stratégiát. Ha a P_1 játékos az első stratégiát (sort) választja, akkor nyereménye a példa alapján legalább 2 lesz. Minden sor választása esetében meg tudja mondani, hogy legalább mennyi nyeresége lesz (ez a sor minimuma). Végül azt az i^0 stratégiát fogja választani, amelynél a sorminimumok értéke a legnagyobb. Jelen példában a P_1 játékos a 3. sort választaná, azaz $i^0 = 3$. Általánosan felírva ez azt jelenti, hogy a P_1 játékos keresi a

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

értéket, vagyis a sorminimumok közül a legnagyobbat. Ha ezt az i^0 stratégia választása esetén találja meg, akkor ezt játszva legalább

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

nyereséget tud magának biztosítani, akárhogyan is játszik a P_2 játékos. Ezt az i^0 stratégiát a P_1 játékos **maximin stratégiájának** nevezzük. Azért nevezzük így, mert a képlet leírásában a sorrend max min. Szokás minimax stratégiának is nevezni, mivel a minimumok maximumát kell venni.

Hasonlóan, ha a P_2 játékos a j-edik stratégiát (oszlopot) választja, akkor az oszlopmaximumnál többet nem veszíthet és azt a j^0 stratégiát keresi, amelynél az oszlopmaximumok értéke a legkisebb. Ha ezt a j^0 stratégiánál éri el, akkor ezt játszva vesztesége nem lehet nagyobb, mint

$$\min_j \max_i a_{ij}$$

akárhogyan is játszik a P_1 játékos. Ezt a j^0 stratégiát a P_2 játékos **minimax stratégiájának** nevezzük. Azért nevezzük így, mert a képlet leírásában a sorrend min max. Szokás maximin stratégiának is nevezni, mivel a maximumok minimumát kell venni.

2.3. A nyeregpont és a minimax, maximin stratégiák kapcsolata

1. TÉTEL (maximin, minimax egyenlőtlenség)
Minden mátrixjáték esetén fennáll, hogy

$$\max_i \min_j a_{ij} \leqq \min_j \max_i a_{ij}$$

A következő tétel választ ad arra, hogy az előbb meghatározott maximin és minimax stratégiák mikor tekinthetők egyensúlyi stratégiáknak, vagy más szóval nyeregpontnak.

2. TÉTEL (egyensúlyi stratégia és a maximin, minimax stratégiák kapcsolata)
Egy mátrixjátéknak akkor és csak akkor van nyeregpontja, ha

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} \ ,$$

a játék értéke a közös érték, azaz $v = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$.

Az utóbbi tétel szerint tehát a maximin és minimax stratégiák akkor tekinthetők egyensúlyi stratégiáknak (nyeregpontnak), ha a **sorminimumok maximuma** megegyezik az **oszlopmaximumok minimumával**.

A tételeket egyszerűen beláthatjuk. Jelölje $\alpha = \max_i \min_j \; a_{ij}$ a **sorminimumok** maximumát és ez legyen valahol az i^0 sorban, hasonlóan jelölje $\beta = \min_j \max_i \; a_{ij}$ az **oszlopmaximumok** minimumát és ez legyen valahol az j^0 oszlopban. Az i^0 sorbeli és j^0 oszlopbeli elem $a_{i^0 j^0}$. Ezt az alábbi sémán szemléltetjük:

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & & j^0 & \\
\hline
 & & & \\
 & & \beta & \\
i^0 & \alpha & a_{i^0 j^0} & \\
 & & & \\
\hline
\end{array}
$$

Az α érték az i^0 sorban a **legkisebb** elem, így írható, hogy

$$\alpha \leqq a_{i^0 j^0},$$

a β érték a j^0 oszlopban a **legnagyobb** elem, így írható, hogy

$$\beta \geqq a_{i^0 j^0}.$$

Az utóbbi két egyenlőtlenséget egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\alpha \leqq a_{i^0 j^0} \leqq \beta,$$

amiből $\alpha \leqq \beta$ adódik, ez pedig az 1. tétel állításával azonos.
Ha $\alpha = \beta = a_{i^0 j^0}$, akkor az $a_{i^0 j^0}$ érték az i^0 sor legkisebb eleme, tehát

$$a_{i^0 j^0} \leqq a_{i^0 j} \qquad \text{minden } j \text{ indexre,}$$

ugyanakkor az $a_{i^0 j^0}$ érték a j^0 oszlop legnagyobb eleme, tehát

$$a_{i^0 j^0} \geqq a_{i j^0} \qquad \text{minden } i \text{ indexre.}$$

Összevetve a két utóbbi egyenlőtlenséget, az alábbi adódik

$$a_{i j^0} \leqq a_{i^0 j^0} \leqq a_{i^0 j} \qquad \text{minden } i, j \text{ indexre.}$$

Ez pedig a (2) egyensúlypont (nyeregpont) definíciónak felel meg. Az is látható, hogy $\alpha = \beta$ esetén a maximin és minimax stratégiák az egyensúlyponti (nyeregponti) stratégiáknak felelnek meg és a játék értéke az $v = \alpha = \beta = a_{i^0 j^0}$ közös érték.

Térjünk vissza az előzőekben vizsgált kifizetési mátrixhoz. Az alábbi táblázatban a sorminimumokat és az oszlopmaximumokat a táblázat jobboldalán, ill. az alján tüntettük fel.

7	2	4	5	2
1	2	8	5	1
6	3	6	7	3
5	0	2	9	0
7	3	8	9	

A P_1 játékos maximin stratégiája az $i^0 = 3$, a P_2 játékos minimax stratégiája a $j^0 = 2$. Mivel a sorminimumok maximuma és az oszlopmaximumok minimuma megegyezik (mindkettő értéke 3), így a 2. tétel értelmében a nyeregponti stratégiák $i^* = i^0 = 3$ és $j^* = j^0 = 2$. A játék értéke pedig a sorminimumok maximumának és az oszlopmaximumok minimumának közös értéke ($v = 3$). Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ha valamelyik játékos eltér ettől a nyeregponti stratégiájától, de a másik játékos nem tér el, akkor számára rosszabb helyzet áll elő.

2. Példa
Tekintsük most az alábbi mátrixjátékot és határozzuk meg a nyeregpontot!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Megoldás:
Először a sorminimumokat és az oszlopmaximumokat határozzuk meg.

$$\begin{array}{|cccc|c} \hline 5 & 4 & 6 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 5 & 3 \\ \hline \\ 7 & 8 & 6 & 5 & \end{array}$$

A sorminimumok ($\min\limits_j \ a_{ij}$) rendre: $2, 4, 3$; ezek maximuma, azaz $\max\limits_i \min\limits_j \ a_{ij} = 4$.
Az oszlopmaximumok ($\max\limits_i \ a_{ij}$) rendre: $7, 8, 6, 5$; ezek minimuma, azaz $\min\limits_j \max\limits_i \ a_{ij} = 5$.
Mivel a két érték nem egyezik meg, azaz a mátrixnak nincs olyan eleme, amely egyszerre lenne sorának minimuma és oszlopának maximuma, így a fenti kifizetési mátrixszal adott mátrixjátéknak az ismert tétel értelmében nincs nyeregpontja, azaz a játékosoknak nincs egyensúlyt biztosító, megnyugtató döntésük. Ellenőrizze le az olvasó az 1. tétel állítását!
Azonnal felmerül a kérdés: Ilyen helyzetben mi legyen a P_1 és a P_2 játékos döntése, melyik stratégiát válasszák? Az alábbiakban erre keressük a választ.

2.4. Tiszta és kevert stratégia fogalma

Ha a játékot sokszor lejátsszák (ezt a későbbiekben is mindig feltételezzük), akkor mindegyik játékosnak érdekében áll a viszonylag jó stratégiákat játékról játékra változtatni, hogy ezáltal a többieknek nyújtott információt csökkentse. Ha valamilyen determinisztikus szabály szerint választja meg a játékos a stratégiáit, akkor hamar kiismerik. Célszerű tehát a stratégiahalmazán egy **eloszlást** definiálni és e szerint az eloszlás szerint **véletlenül** megválasztania a játék konkrét realizálásakor választandó stratégiáit. Ebben az esetben a játékosokat nem az egyes játékokban adódó kifizetéseik (nyereségeik) érdeklik elsősorban, hanem a nyereségeik átlaga, várható értéke. Ezzel egy új játékot definiáltunk, amelyben a játékosok stratégiahalmazai az eredeti stratégiákon értelmezett eloszlások halmaza lesz, a játékosok kifizetőfüggvényei pedig az eredeti kifizetőfüggvényeknek a játékosok által választott eloszlásokra vonatkozó várható értéke. Az így definiált stratégiákat **kevert stratégiáknak** nevezzük. A kevert stratégiák fogalmát Neumann János vezette be először. A játékosok eredeti stratégiáit **tiszta stratégiáknak** is szokás nevezni.

Jelölje a P_1 játékos kevert stratégiáját $y_1, y_2, \ldots, y_m$; a P_2 játékos kevert stratégiáját pedig $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ahol

$$\begin{aligned} x_1, x_2, \ldots, x_n &\geqq 0, \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\ y_1, y_2, \ldots, y_m &\geqq 0, \qquad y_1 + y_2 + \ldots + y_m = 1 \end{aligned}$$

A kevert stratégiákat tehát egy vektorral lehet leírni. (A tiszta stratégia az egységvektornak megfelelő stratégia.) Az y_i például azt jelenti, hogy a P_1 játékos a játéksorozatban az i-edik tiszta stratégiáját y_i valószínűséggel játssza. Szemléltessük adatainkat az alábbi sémán:

$$\begin{array}{ccc} & & P_2 \\ & & \boxed{\begin{array}{ccccc} x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \end{array}} \\ & & \\ P_1 & \boxed{\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{array}} & \boxed{\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array}} \end{array}$$

Ezekután már csak az új kifizetőfüggvényeket kell meghatározni és már alkalmazhatjuk is az új játékra a bevezetőben megadott egyensúlyi stratégia definícióját.

A P_1 játékos **várható nyereségét** (kifizetőfüggvény-értékét) a várható érték definíciója alapján az alábbiak szerint számíthatjuk ki (alkalmazva a lineáris algebrában megismert mátrix-vektor műveleteket):

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j = \mathbf{yAx}.$$

A P_2 játékos **várható vesztesége** nyilvánvalóan ugyanennyi. A bevezetőben ismertetett egyensúly-definíció (1) alapján ebben az új játékban is egyszerűen definiálható az egyensúlypont.

DEFINÍCIÓ (kevert egyensúlyi stratégia)

A játékosok **kevert egyensúlyi stratégiái** alatt azt az $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ kevert stratégiákat értjük, amelyekre az alábbi egyensúlyi vagy nyeregponti összefüggés minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ kevert stratégiára fennáll:

$$\mathbf{yAx}^* \leqq \mathbf{y}^*\mathbf{Ax}^* \leqq \mathbf{y}^*\mathbf{Ax}. \tag{3}$$

Az $\mathbf{y}^*\mathbf{Ax}^*$ várható értéket a **játék értékének** nevezzük és v-vel jelöljük. A v érték a P_1 játékos várható nyereségét, ill. a P_2 játékos várható veszteségét jelenti, ha mindegyik játékos a kevert egyensúlyi stratégiát játssza.

A későbbiekben stratégia alatt mindig kevert stratégiát értünk, ami speciális esetben mint ahogy említettük lehet tiszta stratégia is. A kevert jelző ezekután már el is hagyható és egyensúlypontról, nyeregpontról vagy egyensúlyi, nyeregponti stratégiákról beszélünk.

A kevert stratégiás esetben a tiszta stratégiás esethez hasonló összefüggéseket írhatunk fel, hisz az egyik a másiknak speciális esete. Itt is definiálhatók a maximin és a minimax stratégiák. Az egyensúlyhelyzet keresésében akkor jár el ésszerűen a P_1 játékos, ha igyekszik a maga számára a legnagyobb átlagos nyereséget biztosítani az ellenfél legjobb játéka esetére is. Ha a P_1 játékos valamely $\mathbf{y}$ stratégiáját alkalmazza, akkor nyereményének várható értéke legalább az $\mathbf{yAx}$ értékek P_2 játékos stratégiáinál vett minimuma lesz. A P_1 játékos azt az $\mathbf{y}^0$ stratégiát fogja játszani, amelyre ez a minimum érték a legnagyobb lesz. A P_1 játékos $\mathbf{y}^0$ stratégiáját **maximin stratégiának** nevezzük és ezt játszva legalább

$$\max_{\mathbf{y}} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{yAx}$$

várható nyereséget tud magának biztosítani. Hasonlóan, ha a P_2 játékos az $\mathbf{x}^0$ **minimax stratégiáját** játssza, akkor legfeljebb

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{\mathbf{y}} \mathbf{yAx}$$

várható vesztesége lesz.

3. TÉTEL (maximin, minimax egyenlőtlenség)
Minden mátrixjáték esetén fennáll, hogy

$$\max_{\mathbf{y}} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{yAx} \leqq \min_{\mathbf{x}} \max_{\mathbf{y}} \mathbf{yAx}$$

4. TÉTEL (egyensúlyi stratégia és a maximin, minimax stratégiák kapcsolata)
Egy mátrixjátéknak akkor és csak akkor van nyeregpontja, ha

$$\max_{\mathbf{y}} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{yAx} = \min_{\mathbf{x}} \max_{\mathbf{y}} \mathbf{yAx},$$

a játék értéke a közös érték, azaz $v = \max_{\mathbf{y}} \min_{\mathbf{x}} a_{ij} = \min_{\mathbf{x}} \max_{\mathbf{y}} \mathbf{yAx}$.

A kevert stratégiás esetben azonban a maximin és a minimax stratégiákat sem olyan egyszerű meghatározni.

2.5. Alapvető tulajdonságok

A következőkben néhány hasznos tulajdonságot ismertetünk, amelyek bizonyítását az olvasóra bízzuk:

1. Az $\hat{a}_{ij} = a_{ij} + \lambda$, $\hat{a}_{ij} = \mu a_{ij}$, $\hat{a}_{ij} = \mu a_{ij} + \lambda$ mátrixokkal adott játékok esetén a nyeregpont az eredeti mátrix nyeregpontjával egyezik meg csak a játék értéke változik, mégpedig $\hat{v} = v + \lambda$, $\hat{v} = \mu v$, $\hat{v} = \mu v + \lambda$, ahol λ tetszőleges, $\mu > 0$ valós szám lehet.

2. Egy mátrixjátékban a P_1 játékos $\mathbf{y}_1$ stratégiája **dominálja** az $\mathbf{y}_2$ stratégiáját, ha a P_2 játékos bármely j-edik tiszta stratégiájára fennáll, hogy $\mathbf{y}_1\mathbf{A} \geqq \mathbf{y}_2\mathbf{A}$. Egyszerűbb a dominanciát kezelni tiszta stratégiák esetében, ebben az esetben a P_1 játékos k-adik stratégiája akkor dominálja az r-edik stratégiáját, ha $a_{kj} \geqq a_{rj}$ minden j indexre fennáll. Ez azt jelenti, hogy a P_1 játékos biztosan nem választja az r-edik stratégiát, hiszen bármilyen is az ellenfele stratégiája, számára az r-edik nem lehet jobb mint a k-adik stratégia. A **dominancia elv** segítségével a játék mérete csökkenthető, vagyis az r-edik sor elhagyható a játékból. Hasonlóan oszlopokat is elhagyhatunk, ha a P_2 játékosnak is van domináns stratégiája. Tehát ha $a_{ik} \leqq a_{ir}$ minden i indexre fennáll, akkor a P_2 játékos k-adik stratégiája dominálja az r-edik stratégiáját.

3. A játékot **igazságosnak** mondjuk, ha a játék értéke zérus ($v = 0$).

4. Ha $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ ($a_{ij} = -a_{ji}$), vagyis az $\mathbf{A}$ kifizetési mátrix ferdén szimmetrikus, akkor a játékot **szimmetrikusnak** nevezzük. A szimmetrikus játékok **igazságosak** és a két játékos egyensúlyi stratégiái **megegyeznek**. A szimmetrikus játékoknak ezenkívül azért is kitüntetett szerepük van a mátrixjátékok között, mert bármely mátrixjáték szimmetrikus mátrixjátékká transzformálható.

5. Több nyeregpont létezése esetén érvényes az ún. **felcserélhetőségi tulajdonság**, azaz a felcserélt stratégiák is nyeregpontok. Például, ha az $(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{y}_1^*)$ és az $(\mathbf{x}_2^*, \mathbf{y}_2^*)$ stratégiapár is nyeregpont, akkor az $(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{y}_2^*)$ és az $(\mathbf{x}_2^*, \mathbf{y}_1^*)$ stratégiapár is nyeregpont.

6. Több nyeregpont létezése esetén érvényes az ún. **ekvivalencia tulajdonság**, vagyis az ezekhez tartozó játékértékek megegyeznek. Például, ha az $(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{y}_1^*)$ és az $(\mathbf{x}_2^*, \mathbf{y}_2^*)$ stratégiapár is nyeregpont v_1 és v_2 játékértékkel, akkor $v_1 = v_2$.

2.6. Egyszerű mátrixjátékok geometriai és algebrai megoldása

Ebben a fejezetben az egyszerű, kevés stratégiás (2×2-es, $2 \times n$-es, ill. $m \times 2$-es) játékok megoldását mutatjuk be.

2.6.1. 2×2-es mátrixjáték geometriai megoldása

Egy példán keresztül mutatjuk meg az utat a megoldáshoz, azaz az egyensúlyi stratégiák meghatározásához.

3. Példa

Tekintsünk egy egyszerű 2×2-es mátrixjátékot az alábbi kifizetési mátrixszal. Határozzuk meg a játékosok nyeregponti stratégiáját geometriai módszerrel!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Az alábbi sémában a játék mátrixát és az egyes játékosok stratégiáját tüntettük fel.

$$\begin{array}{c|cc} & x & 1-x \\ \hline y & 3 & 5 \\ 1-y & 6 & 2 \end{array}$$

Megoldás:

Az egyszerűség kedvéért a játékosok $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ stratégiáit az $\mathbf{x} = (x, 1-x)$, ill. $\mathbf{y} = (y, 1-y)$ alakban írtuk fel, ahol $0 \leqq x, y \leqq 1$. Első lépésként számítsuk ki az $\mathbf{yAx}$ várható nyereséget tetszőleges $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ stratégiára:

$$\mathbf{yAx} = 3xy + 5y(1-x) + 6(1-y)x + 2(1-x)(1-y) = 2 + 4x + 3y - 6xy$$

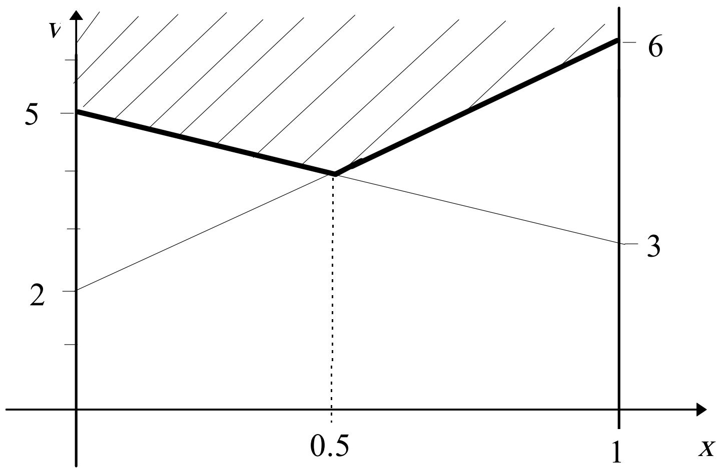
Tekintsük a (3) nyeregponti összefüggés baloldalát, amely szerint

$$\mathbf{yAx}^* \leqq v \quad \text{minden } \mathbf{y} \text{ stratégiára.}$$

Mivel ennek minden $\mathbf{y}$ stratégiára fenn kell állnia, így a tiszta stratégiákra is, azaz $y = 0$, ill. $y = 1$ esetén is. Ezekre a tiszta stratégiákra a fenti egyenlőtlenség az alábbiak szerint írható:

$$\begin{aligned} 2 + 4x^* &\leqq v \\ 5 - 2x^* &\leqq v \end{aligned}$$

Ennek az egyenlőtlenségrendszernek a megoldáshalmazát (sraffozott tartomány) az (x, v) koordinátarendszerben az alábbi ábra mutatja:



A vonalkázott területből kell kiválasztanunk az (x^*, v) pontot. Nyilván az lesz az x^* nyeregponti stratégia, melyhez a **legkisebb** v érték tartozik. Az x^* stratégiát ugyanis a P_2 játékos játssza és az ő célja, hogy a várható vesztesége (v) minél kisebb legyen. A megoldást a két egyenes metszéspontja adja. Jelen esetben $x^* = 0.5$, azaz a P_2 játékos nyeregponti stratégiája $\mathbf{x}^* = (0.5,\ 0.5)$. Ez azt jelenti, hogy a P_2 játékosnak az első és a második tiszta stratégiáját $50 - 50$ %-ban kell véletlenszerűen kevernie. A játék értéke $v = 4$.

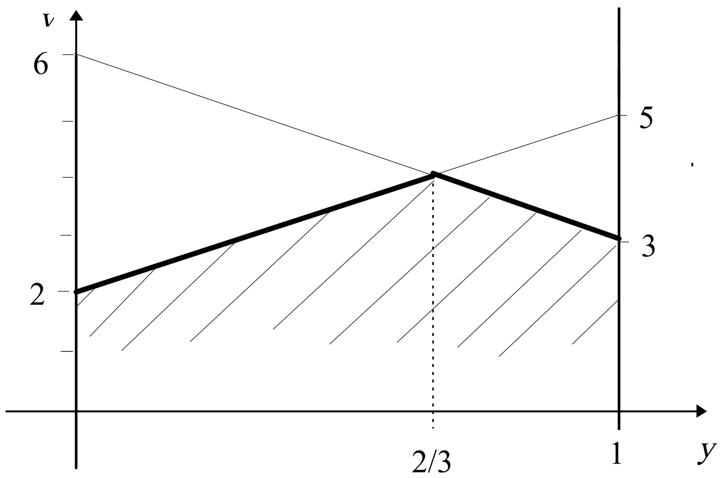
Most tekintsük a (3) nyeregponti összefüggés jobboldalát, amely szerint

$$\mathbf{y}^* \mathbf{A} \mathbf{x} \geqq v \quad \text{minden } \mathbf{x} \text{ stratégiára.}$$

Hasonló módon az előzőhöz, ezt az $x = 0, x = 1$ tiszta stratégiákra felírva, az alábbi egyenlőtlenségrendszert kapjuk, amelyben v a P_1 játékos várható nyereségét jelöli:

$$\begin{aligned} 2 + 3y^* &\geqq v \\ 6 - 3y^* &\geqq v \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenségrendszer lehetséges megoldásait az (y, v) koordinátarendszerben ábrázoljuk.



A vonalkázott területből kell kiválasztanunk az (y^*, v) pontot. Nyilván az lesz az y^* nyeregponti stratégia, melyhez a **legnagyobb** v érték tartozik. Az y^* stratégiát ugyanis a P_1 játékos játssza és az ő célja, hogy a várható nyeresége (v) minél nagyobb legyen. A megoldást a két egyenes metszéspontja adja. Jelen esetben $y^* = 2/3$, azaz a P_1 játékos nyeregponti stratégiája $\mathbf{y}^* = (2/3,\ 1/3)$. Ez azt jelenti, hogy a P_1 játékosnak az első és a második tiszta stratégiáját 2 : 1 arányban kell véletlenszerűen kevernie.

Összefoglalva tehát a mátrixjáték megoldása:
A P_1 játékos nyeregponti stratégiája: $\mathbf{y}^* = (2/3,\ 1/3)$,
A P_2 játékos nyeregponti stratégiája: $\mathbf{x}^* = (1/2,\ 1/2)$,
A játék értéke: $v = 4$.

A véletlenszerűséget csak valamilyen véletlen mechanizmussal lehet biztosítani, mert az ember hajlamos a szabályosságra. Elképzelhető egyik megoldásként például az, hogy P_1 játékos egy urnába betesz 3 golyót, két feketét és egy fehéret. Találomra kivesz közülük egyet és ha feketét húz ki, akkor az első, ha fehéret húz ki, akkor pedig a második tiszta stratégiát fogja játszani. Hasonló módon a P_2 játékos egy urnába 2 golyót tesz be, egy feketét és egy fehéret. Találomra kivesz közülük egyet és ha feketét húz ki, akkor az első, ha fehéret húz ki, akkor pedig a második tiszta stratégiát fogja játszani. A játékosok véletlenszám-táblázatot is használhatnak a megfelelő keverésre.

A fentiekből érezhető, hogy a mátrixjáték nyeregpontját lineáris programozási feladatként is meghatározhatjuk. Ezt az általános megoldási módszert később fogjuk ismertetni, előtte még megmutatjuk a 2×2-es játékoknak egy nagyon egyszerű megoldását és néhány hasznos észrevételt is teszünk, amelyek egy részét fel is használjuk az általános módszer ismertetésénél.

Feladat:
Írja fel a fentebb elmondottak alapján az egyes játékosok nyeregponti stratégiáit meghatározó lineáris programozási feladatokat!

2.6.2. 2×2-es mátrixjátékok algebrai megoldása

A 2×2-es játékok algebrai megoldása tulajdonképpen az előzőekből is kiolvasható. Legyen adott az alábbi általános kifizetési mátrixszal egy mátrixjáték:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Az alábbi sémában a játék mátrixát és az egyes játékosok stratégiáját tüntettük fel.

$$\begin{array}{c c} & \boxed{x \quad 1-x} \\ \boxed{\begin{array}{c} y \\ 1-y \end{array}} & \boxed{\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}} \end{array}$$

Számítsuk ki az $\mathbf{yAx}$ várható nyereséget tetszőleges $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ stratégiára:

$$\mathbf{yAx} = a_{11}yx + a_{12}y(1-x) + a_{21}(1-y)x + a_{22}(1-y)(1-x)$$

Idézzük a (3) nyeregponti összefüggést, amely minden $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ stratégiára fennáll:

$$\mathbf{yAx}^* \leqq v \leqq \mathbf{y}^*\mathbf{Ax}.$$

Mivel a fenti összefüggés baloldala minden $\mathbf{y}$ stratégiára fennáll, így fennáll az $\mathbf{y} = (1,0)$ és az $\mathbf{y} = (0,1)$ tiszta stratégiákra is, ezért írható, hogy

$$\begin{aligned} a_{11}x^* + a_{12}(1-x^*) &\leqq v \\ a_{21}x^* + a_{22}(1-x^*) &\leqq v \end{aligned}$$

A geometriai megoldásnál láttuk, hogy a nyeregpont két egyenes metszéspontjaként adódott, ezek az egyenesek:

$$\begin{aligned} a_{11}x^* + a_{12}(1-x^*) &= v \\ a_{21}x^* + a_{22}(1-x^*) &= v \end{aligned}$$

Ebből pedig az adódik, hogy

$$a_{11}x^* + a_{12}(1-x^*) = a_{21}x^* + a_{22}(1-x^*),$$

átrendezéssel

$$(a_{11} - a_{21})x^* = (a_{22} - a_{12})(1-x^*),$$

amelyből az olvasható ki, hogy

$$x^* : (1-x^*) = (a_{22} - a_{12}) : (a_{11} - a_{21}).$$

A P_2 játékos stratégiáinak keverése: $|a_{22} - a_{12}| : |a_{11} - a_{21}|$, amelyből kiolvasható, hogy a keverési arányt az 1. stratégia esetén a mátrix 2. oszlopában szereplő elemek különbsége, a 2. stratégia esetén a mátrix 1. oszlopában lévő elemek különbsége adja.

Hasonló levezetéssel a P_1 játékos stratégiáinak $y^* : (1-y^*)$ keverése: $|a_{21} - a_{22}| : |a_{11} - a_{12}|$, amelyből kiolvasható, hogy a keverési arányt az 1. stratégia esetén a mátrix

2. sorában szereplő elemek különbsége, a 2. stratégia esetén a mátrix 1. sorában lévő elemek különbsége adja.

Megjegyzés.

Az algebrai megoldás nem minden esetben alkalmazható! Gondoljunk arra, amikor a levezetésben a két egyenes metszéspontjaként definiáltuk a játékos stratégiáját. Mi a helyzet akkor, ha az egyeneseknek nincs metszéspontjuk, de ha van is, akkor sem biztos, hogy a $[0, 1]$ intervallumba esik a metszéspont. A 2×2-es mátrixjátékoknál először mindig keressük meg a tiszta stratégiás nyeregpontot, ha van, akkor nincs szükség további számításra, ha nincs, akkor alkalmazható a fent leírt algebrai megoldás.

4. Példa

Adott az alábbi kifizetési mátrix. Határozzuk meg a nyeregponti stratégiákat algebrai módszerrel!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Először nézzük meg van-e tiszta stratégiás megoldás. Mivel a sorminimumok $(6, 4)$ maximuma (6) nem egyenlő az oszlopmaximumok $(7, 8)$ minimumával (7), a 2. tétel értelmében nincs tiszta stratégiás nyeregpont. A megoldáshoz használjuk az alábbi sémát:

6	8	$7-4=3$
7	4	$8-4=4$
$8-4=4$	$7-6=1$	

Az **első sor** két elemének a különbségét a **második sor** mögé, a **második sor** két elemének a különbségét pedig az **első sor** mögé, ill. az **első oszlop** két elemének a különbségét a **második oszlop** alá, a **második oszlop** két elemének a különbségét pedig az **első oszlop** alá írjuk. A különbségképzésnél mindig a nagyobb értékből vonjuk ki a kisebbet. A fenti levezetés alapján a P_1 játékosnak a **sorok** mögé írt számoknak megfelelően, míg a P_2 játékosnak az **oszlopok** alá írt számoknak megfelelően kell kevernie a tiszta stratégiáit. Ez alapján a játékosok nyeregponti stratégiái és a játék értéke:

A P_1 játékos nyeregponti stratégiája: $\mathbf{y}^* = (3/5,\ 2/5)$,
A P_2 játékos nyeregponti stratégiája: $\mathbf{x}^* = (4/5,\ 1/5)$,
A játék értéke: $v = \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^* = 32/5$.

Feladat

A 3. példában szereplő mátrixjátékot oldjuk meg algebrai módszerrel, a 4. példában szereplő mátrixjátékot oldjuk meg geometriai módszerrel!

Feladat

Adott az alábbi két 2×2-es mátrixjáték. Mindkettőt oldjuk meg geometriai és algebrai úton is, ha lehet! Felhívjuk a figyelmet, hogy a második mátrixjátéknak van tiszta stratégiás nyeregpontja. Milyen hibás eredmény adódna ekkor algebrai módszerrel?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.6.3. $2 \times n$-es és $m \times 2$-es mátrixjáték geometriai megoldása

Azokat a mátrixjátékokat, amelyekben az egyik játákosnak csak két stratégiája van, egyszerűen megoldhatjuk geometriai úton. Vizsgáljuk először a $2 \times n$-es mátrixjátékot, amelynek mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}$$

Tekintsük a (3) nyeregponti összefüggés **jobboldalát**, amely szerint

$$\mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x} \geqq v \quad \text{minden } \mathbf{x} \text{ stratégiára.}$$

Mivel ennek minden $\mathbf{x}$ stratégiára fenn kell állnia, így a P_2 játékos minden tiszta stratégiájára is fenn kell állnia, azaz $\mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{e}_j \geqq v$ minden $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén, amely az

$$\mathbf{y}^*\mathbf{a}_j \geqq v, \qquad j = 1, 2 \ldots, n$$

egyenlőtlenségeknek felel meg, ahol $\mathbf{a}_j$ az $\mathbf{A}$ mátrix j-edik oszlopvektora. Mivel $\mathbf{y}^* = (y, 1 - y)$, ezért az egyenlőtlenségrendszer lehetséges megoldásait az (y, v) koordinátarendszerben ábrázolhatjuk. Minden egyenlőtlenséghez egy egyenes tartozik, az egyenlőtlenségrendszer lehetséges megoldásait az **egyenesek alatti félsíkok** közös része adja. Nyilván az lesz az y^* nyeregponti stratégia, melyhez a **legnagyobb** v érték tartozik. Az y^* stratégiát ugyanis a P_1 játékos játssza és az ő célja, hogy a várható nyeresége (v) minél nagyobb legyen. A megoldást általában valamelyik két egyenes metszéspontja adja. Egyéb esetekkel nem foglalkozunk. A metszéspont y abszcisszájából adódik a P_1 játékos nyeregponti stratégiája, a v ordináta pedig a játék értékét szolgáltatja. A metszéspontot meghatározó két egyeneshez tartozzanak a $j = p$ és a $j = q$ indexek. Bizonyítható, hogy ekkor a P_2 játékos nyeregponti stratégiájában minden **nem** p, q indexhez tartozó stratégia zérus, azaz $x_j^* = 0$, ha $j \neq p, q$. Ebből adódóan az alábbi 2×2-es mátrixjátékot kapjuk

$$\begin{bmatrix} a_{1p} & a_{1q} \\ a_{2p} & a_{2q} \end{bmatrix},$$

amelynél a P_2 játékos nyeregponti stratégiáját szintén meghatározhatjuk geometriai úton.

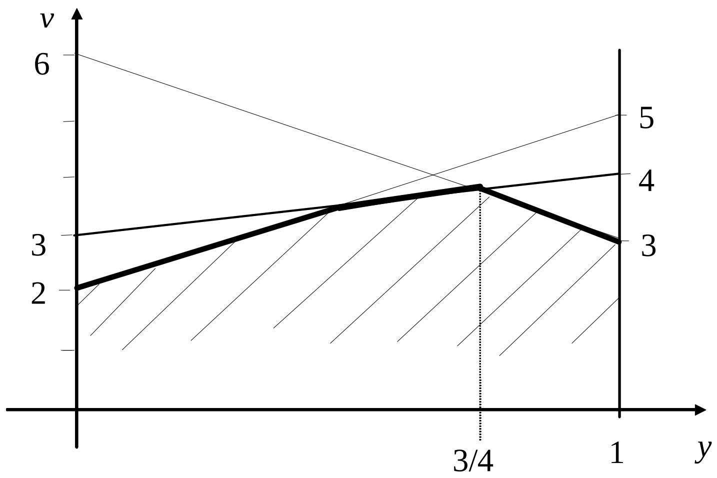
Röviden bizonyítjuk az utóbbi állítást. A két egymást metsző egyenes egyenlete: $\mathbf{y}^*\mathbf{a}_p = v$ és $\mathbf{y}^*\mathbf{a}_q = v$, a többi indexre $\mathbf{y}^*\mathbf{a}_j > v,\ j \neq p, q$. Tegyük fel, hogy a P_2 játékos $\mathbf{x}^*$ nyeregponti stratégiájában $x_p^*, x_q^*, x_k^* \neq 0$, $(x_p^* + x_q^* + x_k^* = 1)$, a többi zérus. A játék értéke $v = \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^*$, amely részletezve $v = (\mathbf{y}^*\mathbf{a}_p)x_p^* + (\mathbf{y}^*\mathbf{a}_q)x_q^* + (\mathbf{y}^*\mathbf{a}_k)x_k^* = vx_p^* + vx_q^* + (\mathbf{y}^*\mathbf{a}_k)x_k^*$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy $(1 - x_p^* - x_q^*)v = (\mathbf{y}^*\mathbf{a}_k)x_k^*$. Figyelembe véve az $(1 - x_p^* - x_q^*) = x_k^*$ összefüggést, írható, hogy $x_k^*(v - \mathbf{y}^*\mathbf{a}_k) = 0$. Mivel $\mathbf{y}^*\mathbf{a}_j > v$, ezért az egyenlőség csak $x_k^* = 0$ esetben állhat fenn, így a P_2 játékosnak valóban csak két stratégiája lehet pozitív, mégpedig az a kettő, amely a metszéspontot meghatározta.

Az $m \times 2$-es mátrixjátékok geometriai megoldása hasonlóan történik, ott a (3) nyeregponti összefüggés **baloldalából** kell kiindulni és az (x, v) koordinátarendszerben kell ábrázolni az egyeneseket.

5. Példa

Tekintsünk egy 2×3-as mátrixjátékot az alábbi kifizetési mátrixszal. Határozzuk meg a játékosok nyeregponti stratégiáját geometriai módszerrel!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$



Megoldás:
Az alábbi sémában a játék mátrixát és az egyes játékosok stratégiáját tüntettük fel:

		P_2		
		x_1	x_2	x_3
P_1	y	4	5	3
	$1-y$	3	2	6

Az $\mathbf{y}^*\mathbf{a}_j \geqq v$ egyenlőtlenségek az alábbiak:

$$\begin{aligned} 4y + 3(1-y) &\geqq v \\ 5y + 2(1-y) &\geqq v \\ 3y + 6(1-y) &\geqq v \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenségrendszer lehetséges megoldásait (az (y, v) koordinátarendszerben ábrázolva) az alábbi sraffozott tartomány mutatja:

Látható, hogy a v érték maximuma az 1. és a 3. egyenlőtlenséghez tartozó egyenesek metszéspontjában van. A metszéspontban $y^* = 3/4$, azaz a P_1 játékos nyeregponti stratégiája $\mathbf{y}^* = (3/4,\ 1/4)$.

A P_2 játékos nyeregponti stratégiáját úgy határozzuk meg, hogy 2. stratégiáját zérusnak vesszük, azaz $x_2^* = 0$. A másik két stratégiát pedig az alábbi 2×2-es mátrixjáték megoldása adja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

A megoldást az olvasóra bízzuk, csupán közöljük a P_2 játékos nyeregponti stratégiáját: $\mathbf{x}^* = (3/4,\ 0,\ 1/4)$.

Megjegyzés:
A 2×2-es mátrixjátékoknál felírtuk az $\mathbf{yAx}$ várható nyereséget. Ebből a példából látható, hogy nem érdemes kiszámítani ezt, hiszen enélkül egyszerűbben felírhatjuk az egyenlőtlenségrendszert. Az ábrázolás is könnyebb, megfigyelhettük, hogy az $y = 0$, ill. $y = 1$ értékekhez tartozó v értékek a mátrix második sorbeli, ill. az első sorbeli adatai.

Feladat

Adott az alábbi négy mátrixjáték. Mindegyiket oldjuk meg geometriai módszerrel! Javasoljuk, hogy alkalmazza az 1. tulajdonságot az utolsó két mátrixjáték esetében. Adjon mindegyik mátrixelemhez akkora pozitív számot, hogy ne szerepeljenek benne negatív számok, így egyszerűbb lehet a számolás. Ne feledkezzen meg, hogy ekkor a játék értéke megváltozik!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 12 \\ 14 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Feladat

A mátrixjáték és a lineáris programozás kapcsolata c. fejezet végén közölt feladatokat oldja meg geometriai és algebrai módszerrel is, ha lehet!

2.7. A mátrixjáték és a lineáris programozás kapcsolata

Az eddigiekben sok mindennel megismerkedtünk, de egyetlen fontos kérdésre még nem adtunk választ, nevezetesen arra, hogy minden mátrixjáték megoldható-e? A következőkben erre a kérdésre az igenlő választ megadó tételt, a játékelmélet alaptételét ismertetjük. A tételt NEUMANN JÁNOS (1928) bizonyította be először, így szokás NEUMANN-tételnek is nevezni. A tételre konstruktív bizonyítást adunk, amellyel megadjuk a mátrixjáték lineáris programozással való megoldásának módját is.

A JÁTÉKELMÉLET ALAPTÉTELE (NEUMANN-tétel):

Tetszőleges **A** kifizetési mátrixszal rendelkező mátrixjátéknak létezik nyeregpontja, azaz létezik olyan $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ stratégiapár, hogy

$$\mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{x}^* \leqq \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^* \leqq \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}$$

minden $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ stratégiapárra teljesül.

Bizonyítás:

Használjuk az alábbi sémát:

$$\begin{array}{ccc}
 & & P_2 \\
 & & \boxed{\begin{array}{ccccc} x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \end{array}} \\
P_1 & \boxed{\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{array}} & \boxed{\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array}}
\end{array}$$

A P_1 játékos a következőképpen okoskodik. Ha a P_1 játékosnak sikerülne olyan $\mathbf{y}$ stratégiát választania, amelyre

$$y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + ... + y_m a_{m1} \geqq \alpha$$

akkor legalább αx_1 várható nyereségre tesz szert. Ha ugyanis a P_1 játékos stratégiája $\mathbf{y}$, a P_2 játékosnak pedig az 1. stratégiája x_1, akkor a P_1 játékos várható nyeresége:

$$y_1 a_{11} x_1 + y_2 a_{21} x_1 + ... + y_m a_{m1} x_1$$

amelyből az előbbi állítás kiolvasható. Hasonlóan, ha a P_2 játékos 2. stratégiája x_2, akkor legalább αx_2 várható nyereséget akkor tud elérni a P_1 játékos, ha

$$y_1a_{12} + y_2a_{22} + ... + y_ma_{m2} \geqq \alpha$$

A fentieket a P_2 játékos minden x_j stratégiájára felírhatjuk. Így a játék során a P_1 játékos nyereménye legalább $\alpha x_1 + \alpha x_2 + ... + \alpha x_n = \alpha(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \alpha$ lesz. Nyilvánvaló, hogy P_1 célja a nyereményének maximalizálása, tehát olyan $\mathbf{y}$ stratégiát próbál választani, amelynél minden j indexre legalább αx_j nyereségeket tud elérni és az α össznyeresége minél nagyobb legyen, azaz

$$\begin{aligned}
y_1a_{11} + y_2a_{21} + ... + y_ma_{m1} &\geqq \alpha \\
y_1a_{12} + y_2a_{22} + ... + y_ma_{m2} &\geqq \alpha \\
&\vdots \\
y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + ... + y_ma_{mn} &\geqq \alpha \\
y_1 + y_2 + ... + y_m &= 1 \\
y_1, y_2, ..., y_m &\geqq 0 \\
\\
\alpha &\to \max!
\end{aligned}$$

Mint látható a P_1 játékos $\mathbf{y}$ stratégiájának meghatározására egy lineáris programozási feladat adódott, amelyet a mátrix-vektor jelölésekkel egyszerűbben is írhatunk (az $\mathbf{1}$ vektor a lineáris algebrában megismert $\mathbf{1} = (1, 1, ..., 1)$ csupa 1-esekből álló ún. összegzővektort jelöli):

$$\begin{aligned}
\mathbf{yA} - \alpha\mathbf{1} &\geqq \mathbf{0} \\
\mathbf{y1} &= 1 \\
\mathbf{y} &\geqq \mathbf{0} \\
\alpha &\to \max!
\end{aligned}$$

Most nézzük meg a P_2 játékos hasonló okoskodását. Ha a P_2 játékosnak sikerülne olyan $\mathbf{x}$ stratégiát választania, amelyre

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leqq \beta$$

akkor legfeljebb βy_1 várható vesztesége lenne, amikor a P_1 játékos 1. stratégiája y_1. Ezt a P_1 játékos minden y_i stratégiájára felírhatjuk. Ekkor a játék során a P_2 játékosnak legfeljebb β vesztesége lesz és a P_2 játékos célja, hogy ezt a veszteségét minimalizálja. A P_2 játékos $\mathbf{x}$ stratégiájának meghatározására tehát az alábbi lineáris programozási feladat szolgál:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax} - \beta\mathbf{1} &\leqq \mathbf{0} \\
\mathbf{x1} &= 1 \\
\mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \\
\beta &\to \min!
\end{aligned}$$

A két játékos stratégiáinak meghatározására szolgáló lineáris programozási feladatok egymásnak duálisai.

Feladat:
Igazolja, hogy a két lineáris programozási feladat egymásnak duálisai!

A második feladatot tekintsük primál, az elsőt pedig duál feladatnak. Könnyen megállapíthatjuk, hogy mind a primál, mind a duál feladatnak van lehetséges megoldása. Például az $y_i = 1/m$, ill. az $x_j = 1/n$ lehetséges megoldások, mert mindig található hozzájuk olyan α, ill. β, amelyek kielégítik a feltételeket. A lineáris programozás dualitási tétele értelmében pedig a fenti lineáris programozási feladatpárnak van optimális megoldása is. Emlékeztetőül a lineáris programozás dualitási tétele azt mondja ki, hogy ha a primál és a duál feladatnak is van lehetséges megoldása, akkor van mindkettőnek optimális megoldása is. Jelölje az optimális megoldásokat $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$, α^*, β^*. Ismert, hogy a lineáris programozásban célfüggvényeknek az optimális értékei megegyeznek, jelöljük ezt v-vel, azaz $v = \alpha^* = \beta^*$. Most pedig megmutatjuk, hogy a fenti lineáris programozási feladatpár megoldása a mátrixjáték megoldását szolgáltatja, vagyis az $\mathbf{x}^*$ vektor a P_2 játékos, az $\mathbf{y}^*$ vektor a P_1 játékos nyeregponti stratégiája és a v közös célfüggvényérték pedig a játék értéke.
Az $\mathbf{y}^*$, α^* optimális megoldás egyben lehetséges is, így $\mathbf{y}^*\mathbf{A} \geqq \alpha^*\mathbf{1}$. Szorozzuk be az egyenlőtlenséget jobbról tetszőleges $\mathbf{x}$ stratégiával, ekkor kapjuk, hogy

$$\mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x} \geqq \alpha^*\mathbf{1}\mathbf{x} = \alpha^* = v.$$

Hasonlóan az $\mathbf{x}^*$, β^* optimális megoldás egyben lehetséges is, így $\mathbf{A}\mathbf{x}^* \leqq \beta^*\mathbf{1}$. Szorozzuk be az egyenlőtlenséget balról tetszőleges $\mathbf{y}$ stratégiával, ekkor kapjuk, hogy

$$\mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{x}^* \leqq \beta^*\mathbf{y}\mathbf{1} = \beta^* = v.$$

A fenti két egyenlőtlenséget egybevetve tehát minden $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ stratégiára fennáll, hogy

$$\mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{x}^* \leqq v \leqq \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Ha az $\mathbf{x}$ és az $\mathbf{y}$ stratégiák helyébe az $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ stratégiákat helyettesítjük, azt kapjuk hogy

$$v = \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^*.$$

Az előző egyenlőtlenségből viszont az írható, hogy minden $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ stratégiára fennáll az

$$\mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{x}^* \leqq \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^* \leqq \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

egyenlőtlenség. Ez pedig a nyeregponti összefüggéssel azonos, tehát a lineáris programozási feladatpár $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ optimális megoldásai a mátrixjáték egyensúlyi stratégiái, a v pedig a játék értéke. Ezzel a Neumann-tételt bebizonyítottuk. **Q.e.d.**

Összefoglalva tehát a mátrixjáték megoldásához meg kell oldanunk az alábbi lineáris programozási feladatpárt:

$$\begin{array}{rr} \mathbf{A}\mathbf{x}-\beta\mathbf{1} \geqq \mathbf{0} & \qquad \mathbf{y}\mathbf{A}-\alpha\mathbf{1} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{1}\mathbf{x} = 1 & \mathbf{y}\mathbf{1} = 1 \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} & \mathbf{y} \geqq \mathbf{0} \\ \beta \to \min! & \alpha \to \max! \end{array} \tag{4}$$

A fenti lineáris programozási feladatpárban szereplő α és β ismeretlenekre a nemnegativitási feltétel nem vonatkozik, azaz előjelkötetlen változók. A megoldásnál ezt figyelembe kell venni. Célszerű azonban a megoldandó lineáris programozási feladatpárt átalakítani, könnyebben kezelhető formára hozni. Ehhez a primál feladat minden feltételét β-val, a duál feladat minden feltételét pedig α-val elosztjuk. Az α és β változó mennyiségek, értéküket nem ismerjük, így az egyenlőtlenségek osztásánál probléma jelentkezik. Azonban, ha biztosítani tudjuk, hogy α és β értékei csak pozitívok lehetnek, akkor valóban eloszthatjuk az egyenlőtlenségeket, mert az egyenlőtlenség iránya nem változik meg. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy ha az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív, akkor az α és β lehetséges értékei is csak pozitívak lehetnek. Ez azonban azt jelentené, hogy leszűkítettük a mátrixjátékokat a pozitív mátrixokra. Az 1. észrevétel alapján azonban tudjuk, hogy ha a kifizetési mátrix minden eleméhez hozzáadunk egy λ tetszőleges számot, akkor az új kifizetési mátrixszal jellemzett mátrixjáték és az eredeti mátrixjáték nyeregpontja ugyanaz marad, csak a játék értéke változik λ értékkel. Tehát ha feltételezzük, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív (ha nem az, akkor mindig pozitívvá tehető az 1. észrevétel alapján), a primál feladat β-val való osztás után az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{x}}{\beta}\right) &\leqq \mathbf{1}\\ \left(\frac{\mathbf{x}}{\beta}\right)\mathbf{1} &= \frac{1}{\beta}\\ \frac{\mathbf{x}}{\beta} &\geqq \mathbf{0}\\ \beta &\to \text{min!}\end{aligned}$$

Vezessük be a $\mathbf{z} = \mathbf{x}/\beta$ új változót. A második összefüggés íly módon az $\mathbf{1z} = 1/\beta$ egyenletté alakul és a β minimalizálása egyenértékű a reciprokának, azaz az $\mathbf{1z}$ mennyiségnek a maximalizálásával. Hasonlóképpen a duál feladatot is átalakíthatjuk, ahol az új változót $\mathbf{w}$-vel ($\mathbf{w} = \mathbf{y}/\alpha$) jelöljük. Ekkor az alábbi kanonikus (szimmetrikus) alakú lineáris programozási feladatpárt nyerjük, ne felejtsük, hogy ebben az esetben már $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ feltételezéssel élünk:

$$\begin{aligned}\mathbf{Az} &\leqq \mathbf{1} \qquad\qquad & \mathbf{wA} &\geqq \mathbf{1}\\ \mathbf{z} &\geqq \mathbf{0} & \mathbf{w} &\geqq \mathbf{0}\\ \mathbf{1z} &\to \text{max!} & \mathbf{w1} &\to \text{min!}\end{aligned} \tag{5}$$

Könnyen meggyőződhetünk, hogy a két feladat egymásnak duálisa. Mindkét feladatnak van lehetséges megoldása (például a $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, ill. elegendően nagy $\mathbf{w}$ vektor), így optimális megoldása is. Jelölje az optimális megoldásokat $\mathbf{z}^*$, ill. $\mathbf{w}^*$, a célfüggvények közös optimális értékét pedig ω. Az $\omega = \mathbf{1z}^* = \mathbf{w}^*\mathbf{1}$ értéke az $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ feltevés miatt pozitív.

A lineáris programozási feladatpár optimális megoldásaiból a P_2 játékos $\mathbf{x}^*$, a P_1 játékos $\mathbf{y}^*$ nyeregponti stratégiáját és a játék értékét az alábbiak szerint számítjuk ki:

$$\mathbf{x}^* = \tfrac{1}{\omega}\mathbf{z}^*, \qquad \mathbf{y}^* = \tfrac{1}{\omega}\mathbf{w}^*, \qquad v = \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \tfrac{1}{\omega}.$$

6. Példa

Oldjuk meg az alábbi kifizetési mátrixszal adott mátrixjátékot! E példán keresztül mutatjuk meg a mátrixjáték lineáris programozással történő megoldását.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Használjuk az alábbi sémát, amelyben a játék mátrixát és az egyes játékosok stratégiáját tüntettük fel.

	x_1	x_2	x_3
y_1	3	-2	1
y_2	-1	4	-1

A (4) lineáris programozási feladatpár az alábbiak szerint írható:

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 2x_2 + x_3 - \beta &\leqq 0 \\
-x_1 + 4x_2 - x_3 - \beta &\leqq 0 \\
\\
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1, x_2, x_3 &\geqq 0 \\
\beta &\to \min!
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
3y_1 - y_2 - \alpha &\geqq 0 \\
-2y_1 + 4y_2 - \alpha &\geqq 0 \\
y_1 - y_2 - \alpha &\geqq 0 \\
y_1 + y_2 &= 1 \\
y_1, y_2 &\geqq 0 \\
\alpha &\to \max!
\end{aligned}
$$

A feladatpárt szimplex módszerrel akarjuk megoldani. Mivel β előjelkötetlen változó, ezért be kell vezetni a β', β'' új nemnegatív változókat úgy, hogy $\beta = \beta' - \beta''$. A primál feladatra (baloldali feladat) vonatkozó induló szimplex tábla az alábbi:

	x_1	x_2	x_3	β'	β''	
u_0^*	1	1	1	0	0	1
u_1	3	-2	1	-1	1	0
u_2	-1	4	-1	-1	1	0
	0	0	0	-1	1	0

Tovább nem is folytatjuk a megoldást, mivel az előjelkötetlen változó és az egyenlet miatt a megoldás bonyolultabb, mint az (5) kanonikus (szimmetrikus) alakú lineáris programozási feladatpár megoldása.

Feladat

a) Folytassa a megoldást, adja meg az LP feladatpár, majd a mátrixjáték megoldását!

b) Írja fel a duál feladathoz az induló szimplex táblát és oldja meg az LP feladatpárt, ill. a mátrixjátékot.

Az (5) alakú lineáris programozási feladatpár példánkban az alábbiak szerint írható. Ne feledkezzünk el, hogy az **A** mátrix elemeihez hozzá kell adni egy olyan számot, hogy a mátrix pozitívvá váljon. Példánkban 3-at adtunk minden elemhez. Ekkor az alábbi séma írható fel, megkönnyítendő a feladatpár felírását:

	z_1	z_2	z_3
w_1	6	1	4
w_2	2	7	2

A lineáris programozási feladatpár.

$$
\begin{aligned}
6z_1 + z_2 + 4z_3 &\leqq 1 \\
2z_1 + 7z_2 + 2z_3 &\leqq 1 \\
z_1, z_2, z_3 &\geqq 0 \\
\\
z_1 + z_2 + z_3 &\to \max!
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
6w_1 + 2w_2 &\geqq 1 \\
w_1 + 7w_2 &\geqq 1 \\
4w_1 + 2w_2 &\geqq 1 \\
w_1, w_2 &\geqq 0 \\
w_1 + w_2 &\to \min!
\end{aligned}
$$

Ha **baloldali** feladatot tekintjük primál feladatnak, akkor a megoldás legegyszerűbben **szimplex módszerrel** végezhető és a $\mathbf{z}$ mint primál megoldás, a $\mathbf{w}$ pedig mint duál megoldás olvasható ki a szimplex táblázatból.

Ha pedig a **jobboldali** feladatot tekintjük primál feladatnak, akkor a megoldás legegyszerűbben **duál módszerrel** végezhető és a $\mathbf{w}$ mint primál megoldás, a $\mathbf{z}$ pedig mint duál megoldás olvasható ki a szimplex táblázatból.

Az alábbiakban a szimplex módszerrel történő megoldás induló és optimális tábláját közöljük.

	z_1	z_2	z_3	
u_1	6	1	4	1
u_2	2	7	2	1
	1	1	1	0

	z_1	u_2	u_1	
z_3	$\frac{20}{13}$	$-\frac{1}{26}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{3}{13}$
z_2	$-\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	2	$\frac{1}{13}$
	$-\frac{5}{13}$	$-\frac{3}{26}$	$-\frac{5}{26}$	$-\frac{4}{13}$

A lineáris programozási feladatpár optimális megoldása:

$$\mathbf{z}^* = (0,\ \frac{1}{13},\ \frac{3}{13}), \qquad \mathbf{w}^* = (\frac{5}{26},\ \frac{3}{26}), \qquad \omega = \frac{4}{13}.$$

A mátrixjáték megoldása:

$$\mathbf{x}^* = \frac{1}{\omega}\mathbf{z}^* = (0,\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}), \qquad \mathbf{y}^* = \frac{1}{\omega}\mathbf{w}^* = (\frac{5}{8},\ \frac{3}{8}), \qquad v = \frac{1}{\omega} - 3 = \frac{1}{4}.$$

Ne feledkezzünk meg a játék értékének számításánál arról, hogy 3-mal növeltük a mátrix elemeit, így a kapott $\frac{1}{\omega}$ értéket 3-mal csökkenteni kell.

A duál módszerrel történő megoldásnál pedig az alábbi induló és optimális táblát kapjuk:

	w_1	w_2	
r_1	-6	-2	-1
r_2	-1	-7	-1
r_3	-4	-2	-1
	-1	-1	0

	r_3	r_2	
r_1	$-\frac{20}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{5}{13}$
w_2	$\frac{1}{26}$	$-\frac{2}{13}$	$\frac{3}{26}$
w_1	$-\frac{7}{26}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{5}{26}$
	$-\frac{3}{13}$	$-\frac{1}{13}$	$\frac{4}{13}$

Feladat

A fenti kiinduló szimplex táblákból (a szimplex, ill. a duál módszer lépéseit használva) határozza meg az LP optimális megoldását!

Megjegyzés

Végtelen sok (5) típusú lineáris programozási feladat írható fel. Példánkban az eredeti $\mathbf{A}$ mátrixszal is felírhattuk volna a lineáris programozási feladatpárt, mivel a játék értéke **pozitív**. Ezt előre nem lehet tudni, ezért javasoltuk azt, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix elemeihez adjunk annyit, hogy pozitív legyen. Javasoljuk az olvasónak ezt az utóbbi megoldást is.

7. Példa

Két cég (C_1, C_2) azonos terméket állít elő. A környéken két számításba jöhető város (V_1, V_2) van, amelyeknek az árumegrendeléseiért versengenek a cégek. Egy város megrendeléseit az a cég kapja, amelyik nagyobb összeget fordít reklámcélokra. A C_1 cég 4 milliót, a C_2 cég pedig 3 milliót fordíthat reklámcélokra. Az összeget csak egymilliós egységekben lehet felhasználni. Az egyes cégek - a rendelés megszerzéséből származó haszon mellett -

azt is hasznosnak tekintik, ha az ellenfél ott használja fel pénzeszközeit ahol végül vereséget szenved, mert ezzel a későbbiekben gyengül. Egy város rendelésének megszerzése 100 milliós hasznot jelent, ugyanennyit ér az ellenfél minden erre a városra költött milliója is. Például, ha a C_1 cég a V_1 városban 3 millióért szervez reklámhadjáratot, a C_2 cég pedig ugyanitt 2 millióért, akkor a C_1 cég haszna 300 millió, mert a C_1 cég kapta meg a megrendelést, így a 100 millió is és a C_2 cég vesztesége miatti $2 \cdot 100$ millió is az ő haszna. A továbbiakban a nyereség egységét válasszuk 100 milliónak. Egyező reklámköltség esetén a nyereséget nullának tekintjük.

Megoldás:

A cégek választási lehetőségei az egyes városokra költendő pénzösszeg. A C_1 cégnek 5, a C_2 cégnek pedig 4 stratégiája van. A stratégiákat jelöljük az (x, y) szimbólummal, ahol az x a V_1 városra, az y pedig a V_2 városra költött összeget jelenti. Ezek alapján könnyen felírhatjuk a mátrixjáték kifizetési mátrixát táblázatos formában:

	(3,0)	(0,3)	(2,1)	(1,2)
(4,0)	4	0	2	1
(0,4)	0	4	1	2
(3,1)	1	-1	3	0
(1,3)	-1	1	0	3
(2,2)	-2	-2	2	2

A kifizetési mátrix minden eleméhez adjunk hármat és az (5) típusú lineáris programozási feladatpár szimplex módszerrel történő megoldása esetén az induló és az optimális táblák az alábbiak:

	z_1	z_2	z_3	z_4	
u_1	7	3	5	4	1
u_2	3	7	4	5	1
u_3	4	2	6	3	1
u_4	2	4	3	6	1
u_5	1	1	5	5	1
	1	1	1	1	0

	u_1	u_2	u_3	u_5	
z_1	$\frac{97}{410}$	$-\frac{13}{205}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{27}{410}$	$\frac{3}{410}$
z_2	$-\frac{47}{410}$	$\frac{38}{205}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{63}{410}$	$\frac{7}{410}$
z_3	$-\frac{44}{205}$	$-\frac{3}{205}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{11}{205}$	$\frac{24}{205}$
u_4	$-\frac{21}{41}$	$-\frac{21}{41}$	1	$-\frac{36}{41}$	$\frac{4}{41}$
z_4	$\frac{39}{205}$	$-\frac{2}{205}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{61}{205}$	$\frac{16}{205}$
	$-\frac{4}{41}$	$-\frac{4}{41}$	0	$-\frac{1}{41}$	$-\frac{9}{41}$

A lineáris programozási feladatpár optimális megoldása:

$$\mathbf{z}^* = (\frac{3}{410}, \frac{7}{410}, \frac{24}{205}, \frac{16}{205}), \qquad \mathbf{w}^* = (\frac{4}{41}, \frac{4}{41}, 0, 0, \frac{1}{41}), \qquad \omega = \frac{9}{41}.$$

A mátrixjáték megoldása:

$$\mathbf{x}^* = \frac{1}{\omega}\mathbf{z}^* = (\frac{3}{90}, \frac{7}{90}, \frac{48}{90}, \frac{32}{90}), \qquad \mathbf{y}^* = \frac{1}{\omega}\mathbf{w}^* = (\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, 0, 0, \frac{1}{9}), \qquad v = \frac{1}{\omega} - 3 = \frac{14}{9}.$$

Másik megoldása is van a fenti mátrixjátéknak az u_3 alatti zérus érték miatt. Ebben az oszlopban választva pivotelemet a lineáris programozási feladatpárnak az alábbi optimális megoldása adódik :

$$\mathbf{z}^* = (\frac{7}{410},\ \frac{3}{410},\ \frac{16}{205},\ \frac{24}{205}), \qquad \mathbf{w}^* = (\frac{4}{41},\ \frac{4}{41},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{41}), \qquad \omega = \frac{9}{41}.$$

A mátrixjáték másik megoldása pedig:

$$\mathbf{x}^* = \frac{1}{\omega}\mathbf{z}^* = (\frac{7}{90},\ \frac{3}{90},\ \frac{32}{90},\ \frac{48}{90}), \qquad \mathbf{y}^* = \frac{1}{\omega}\mathbf{w}^* = (\frac{4}{9},\ \frac{4}{9},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{9}), \qquad v = \frac{1}{\omega} - 3 = \frac{14}{9}.$$

A két megoldás létezése azt jelenti, hogy valójában végtelen sok megoldás létezik. A C_2 cég mindkét egyensúlyi stratégiájának bármely konvex lineáris kombinációja is egyensúlyi stratégia, azaz a C_2 cég egyensúlyi stratégiái:

$$\mathbf{x}^* = \lambda(\frac{3}{90},\ \frac{7}{90},\ \frac{48}{90},\ \frac{32}{90}) + (1-\lambda)(\frac{7}{90},\ \frac{3}{90},\ \frac{32}{90},\ \frac{48}{90}), \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1).$$

8. Példa

Egy jól ismert gyermekjátékban mindegyik játékos "követ", "ollót" vagy "papírt" kiállt egyidejűleg. Szokásos az is amikor a kiáltás helyett egyidejűleg mutatják a tárgyakat. A kő jele az ökölbe szorított kéz, az olló jele a mutató és a középső ujj szétnyitása, a papír jele pedig a vízszintes tenyértartás. Ha mindketten ugyanazt jelzik, akkor egyik sem nyer, egyébként a nyerés azon alapszik, hogy az olló szétvágja a papírt, a kő kicsorbítja az ollót, a papír beborítja a követ. A fizetés kő-olló esetén 1, olló-papír esetén 2, papír-kő esetén 3 pénzegység. Határozzuk meg a nyeregponti stratégiákat!

Megoldás:

Először felírjuk a kifizetési mátrixot táblázatos formában:

	kő	olló	papír
kő	0	1	-3
olló	-1	0	2
papír	3	-2	0

A kifizetési mátrix minden eleméhez adjunk 4-et a pozitivitás biztosítása érdekében. Ezután a lineáris programozási feladatot oldjuk meg, az induló és az optimális szimplex táblák az alábbiak:

	z_1	z_2	z_3	
u_1	4	5	1	1
u_2	3	4	6	1
u_3	7	2	4	1
	1	1	1	0

	u_3	u_1	u_2	
z_2	$-\frac{7}{48}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$
z_3	$\frac{1}{144}$	$-\frac{11}{72}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{24}$
z_1	$\frac{13}{72}$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$
	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$

A lineáris programozási feladatpár optimális megoldása:

$$\mathbf{z}^* = (\frac{1}{12},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{24}), \qquad \mathbf{w}^* = (\frac{1}{12},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{24}), \qquad \omega = \frac{1}{4}.$$

A mátrixjáték megoldása:

$$\mathbf{x}^* = \frac{1}{\omega}\mathbf{z}^* = (\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6}), \qquad \mathbf{y}^* = \frac{1}{\omega}\mathbf{w}^* = (\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6}), \qquad v = \frac{1}{\omega} - 4 = 0.$$

A megoldás szerint mindkét játékosnak a kő, olló, papír jelzését 2 : 3 : 1 arányban kell keverni. A játék értéke 0, így a játék igazságos. A 4. észrevétel alapján előre tudhattuk, hogy mindkét játékosnak ugyanaz lesz az egyensúlyi stratégiája és a játék értéke zérus. Ez utóbbit felhasználva elég lett volna a kifizetési mátrix elemeihez 1-et (vagy tetszőleges pozitív számot) hozzáadni, mert akkor az új játéknak már biztosan pozitív lesz az értéke. Javasoljuk az olvasónak, oldja meg a lineáris programozási feladatpárt, amikor 1-et ad hozzá a kifizetési mátrix elemeihez.

9. Példa

Oldjuk meg az 1. példában közölt ún. kétujjú Morra játékot!

	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
(1,1)	0	2	-3	0
(1,2)	-2	0	0	3
(2,1)	3	0	0	-4
(2,2)	0	-3	4	0

Megoldás:

Mivel a játék szimmetrikus, a 4. észrevétel értelmében a játék értéke zérus. Ebben az esetben a kifizetési mátrixhoz elegendő például 1-et hozzáadni, hisz ekkor már az új mátrixjáték értéke pozitív lesz. Az nem érdekes, hogy az elemek között lesz 0 és esetleg negatív is, az a fontos, hogy a játék értéke pozitív legyen. Az alábbiakban közöljük a mátrixjáték megoldását, azaz a nyeregponti stratégiákat és a játék értékét. Megoldásként két nyeregponti stratégia is adódott. Mivel a példában szereplő játék szimmetrikus, így a két játékos egyensúlyi stratégiája megegyezik, a játék értéke pedig zérus:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^* &= (0,\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0), \quad \mathbf{y}_1^* = (0,\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0), \quad v_1 = 0 \\ \mathbf{x}_2^* &= (0,\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{7},\ 0), \quad \mathbf{y}_2^* = (0,\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{7},\ 0), \quad v_2 = 0. \end{aligned}$$

Igazolható, hogy több egyensúlyi stratégia esetén az egyensúlyi stratégiák minden **konvex lineáris kombinációja** is egyensúlyi stratégia, azaz a mátrixjáték megoldása:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^* = \lambda(0,\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ 0) + (1-\lambda)(0,\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{7},\ 0), \quad (0 \leqq \lambda \leqq 1).$$

Feladat

Írja fel a 9. példa megoldásához a lineáris programozási feladatpárt, majd oldja meg! Az LP megoldásából határozza meg a mátrixjáték nyeregponti stratégiáit!

Megjegyzés a mátrixjáték megoldásához

Első lépésként célszerű **tiszta stratégiás nyeregpontot** keresni. Megnézni, hogy van-e a mátrixnak nyeregpontja!

Ha van, akkor megtaláltuk a mátrixjáték megoldását. Ha nincs, akkor célszerű **dominancia vizsgálattal** a méretet csökkenteni. Végül a lineáris programozási feladattal oldjuk meg a feladatot. Természetesen a 2×2-es mátrixjáték esetén nem érdemes lineáris programozással keresni a mátrixjáték megoldását.

10. Példa

Oldjuk meg az alábbi mátrixszal adott játékot! A megoldás során bemutatjuk a dominancia elv használatát is, amellyel a lineáris programozási feladatpár mérete csökkenthető.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 3 & 5 & 4 & 4 \\ 6 & 9 & 9 & -3 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 1 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 5 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Egyszerű számolással megállapíthatjuk, hogy a mátrixjátéknak nincs tiszta nyeregponti stratégiája. Ezután a dominanciát vizsgáljuk meg. A mátrix 3. sora dominálja az 1. és a 2. sort, így a P_1 játékos biztosan nem fogja ez utóbbi két sort választani, tehát elhagyható. Az 5. oszlop pedig az 1., 2. és a 6. oszlopot dominálja, így az utóbbi 3 oszlop is elhagyható. A redukció után az alábbi mátrix keletkezik:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 9 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ebben a mátrixban pedig a 3. sor dominálja a 4. sort, így a mátrix tovább redukálható:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 9 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy e mátrixban az 1. és 2. oszlop átlaga dominálja a 3. oszlopot, így a 3. oszlop is elhagyható:

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & -3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Végül pedig az látjuk, hogy az első két sor átlaga a 3. sort adja, így a 3. sor is elhagyható. Végeredményben az alábbi 2×2-es kifizetési mátrix adódik:

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

A fenti 2×2-es játéknak az egyensúlyi stratégiáit pedig a már megismert nagyon egyszerű módszerrel meghatározhatjuk, amely az alábbi:

$$\hat{\mathbf{x}}^* = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7}), \quad \hat{\mathbf{y}}^* = (\frac{6}{7}, \frac{1}{7}), \quad \hat{v} = \frac{27}{7}.$$

Az eredeti mátrixjáték egyensúlyi stratégiái pedig:

$$\mathbf{x}^* = (0,\ 0,\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{7},\ 0,\ 0), \quad \mathbf{y}^* = (0,\ 0,\ \frac{6}{7},\ \frac{1}{7},\ 0,\ 0), \quad v = \frac{27}{7}.$$

Feladat

Oldja meg az alábbi kifizetési mátrixokkal adott mátrixjátékokat:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Feladat

Milyen α esetén lesz az alábbi mátrixjáték értéke 1. Határozza meg azt az α értéket, amelynél a játék igazságos? Írja fel a nyeregponti stratégiákat is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & \alpha - \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

Feladat

A P_1 játékos elrejt a kezében egy vagy két darab 10 Ft-os pénzérmét. A P_2 játékos találgat, hogy vajon a P_1 játékos egy vagy két darabot rejtett-e el. Ha a P_2 játékos kitalálja, akkor övé a pénz, egyébként P_1 megtartja magának. Határozza meg a játékosok nyeregponti stratégiáit és a játék értékét!

Feladat

A P_1 játékos azt mondja "egy" vagy "kettő", ezekután egymástól függetlenül mindkét játékos leírja a két szám közül az egyiket. Ha a mondott és a két leírt szám összege páratlan, akkor P_2 ezt az összeget fizeti P_1-nek, ha a három szám összege páros, akkor ezt P_1 fizeti P_2-nek. Írjuk fel a játék mátrixát és oldjuk meg a mátrixjátékot!

Feladat

Adott egy mátrixjáték **A** kifizetési mátrixa.
a) Határozza meg a játékosok maximin és minimax stratégiáját!
b) Határozza meg a játékosok egyensúlyi stratégiáját és a játék értékét LP segítségével!
c) Ennek a mátrixjátéknak két megoldása van. Adja meg a másik megoldást is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \\ 1.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$

Feladat

Adott egy mátrixjáték **A** kifizetési mátrixa.
a) Határozza meg a játékosok maximin és minimax stratégiáját!
b) Határozza meg a játékosok egyensúlyi stratégiáját és a játék értékét LP segítségével!
c) Ennek a mátrixjátéknak két megoldása van. Adja meg a másik megoldást is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Feladat

Két játékos (P_1, P_2) midegyikének egy-egy papírlapja van. A P_1 játékos **A** vagy **X** betűt, a P_2 játékos pedig **B** vagy **Y** betűt írhat a lapra. Miután felírták a betűket (egymás írását nem látják), felmutatják a lapokat. Ha mindegyik az ABC elejéről vagy a végéről választott betűt, akkor P_1 nyer P_2-től, mégpedig **A**,**B** párosítás esetén 2, **X**,**Y** párosítás esetén pedig 4 pénzegységet. Ha egyik az ABC elejéről, a másik a végéről választott betűt, akkor P_2 nyer P_1-től, mégpedig **A**,**Y** párosítás esetén 1, **X**,**B** párosítás esetén pedig 3 pénzegységet.

a) Írja fel a játék kifizetési mátrixát!

b) Határozza meg a játékosok maximin és minimax stratégiáját!

c) Írja fel azt az LP feladatpárt, amelynek segítségével meghatározható a játékosok egyensúlyi stratégiája!

d) Oldja meg az LP feladatpárt!

e) Adja meg és szavakban értelmezze a játékosok egyensúlyi stratégiáját és a játék értékét!

Feladat

Két játékos (P_1, P_2) az alábbi játékot játssza. A P_1 játékos 1, 2 vagy 5 Eurós pénzérmét, a P_2 játékos pedig 1 vagy 2 Eurós pénzérmét tart a markában. Az elrejtett pénzek összegének megfelelő mennyiségű pénzt lehet nyerni. Ha a pénzösszeg páros, akkor P_1 nyer P_2-től, egyébként P_2 nyer P_1-től.

a) Írja fel a játék kifizetési mátrixát!

b) Határozza meg a játékosok maximin, ill. minimax stratégiáját!

c) Írja fel azt a LP feladatpárt, amelynek segítségével meghatározhatjuk a játékosok egyensúlyi stratégiáját!

d) Oldja meg az LP feladatpárt!

e) Adja meg és szavakban értelmezze a játékosok egyensúlyi stratégiáját és a játék értékét!

Feladat

Két játékos (P_1, P_2) az alábbi játékot játssza. A P_1 és a P_2 játékos is 1 vagy 2 Eurós pénzérmét tart a markában. Az elrejtett pénzek összegének megfelelő mennyiségű pénzt lehet nyerni. Ha a pénzösszeg páros, akkor P_1 nyer P_2-től, egyébként P_2 nyer P_1-től.

a) Írja fel a játék kifizetési mátrixát!

b) Határozza meg a játékosok maximin, ill. minimax stratégiáját!

c) Írja fel azt az LP feladatpárt, amelynek segítségével meghatározhatjuk a játékosok egyensúlyi stratégiáját!

d) Oldja meg az LP feladatpárt!

e) Adja meg és szavakban értelmezze a játékosok egyensúlyi stratégiáját és a játék értékét!

Feladat

A P_1 játékosnak kettő, a P_2 játékosnak három stratégiája van. Ha mindketten az 1. stratégiát választják, akkor a kifizetés zérus. Ha mindketten a 2. stratégiát választják, akkor is zérus a kifizetés. Ha P_1 az 1. stratégiát P_2 a 2. stratégiát választja, akkor P_2 nyer 1 pénzegységet. Ha P_1 a 2. stratégiát P_2 az 1. stratégiát választja, akkor P_1 nyer 1 pénzegységet. Ha P_1 az 1. stratégiát P_2 a 3. stratégiát választja, akkor P_1 nyer 2 pénzegységet. Ha P_1 a 2. stratégiát P_2 a 3. stratégiát választja, akkor P_2 nyer 2 pénzegységet.

a) Írja fel a kifizetési mátrixot!

b) Határozza meg a játékosok maximin, ill. minimax stratégiáját!

c) Írja fel a játékosok nyeregponti stratégiájának meghatározásához a lineáris programozási feladatot és annak duálisát, majd oldja meg a feladatpárt.

d) Adja meg a játékosok nyeregponti stratégiáját és a játék értékét!

Feladat

Adott egy mátrixjáték kifizetési mátrixa. Határozza meg a játékosok maximin ill. minimax stratégiáját! Írja fel a játékosok nyeregponti stratégiájának meghatározásához a lineáris programozási feladatot, majd oldja meg ezt és adja meg a játékosok nyeregponti stratégiáját és a játék értékét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Feladat
Adott egy mátrixjáték **A** kifizetési mátrixa.
a) Határozza meg a játékosok egyensúlyi stratégiáját és a játék értékét lineáris programozás segítségével!
b) Ennek a mátrixjátéknak két megoldása van. Adja meg a másik megoldást is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Feladat
Adott egy mátrixjáték A kifizetési mátrixa.
a) Határozza meg a játékosok egyensúlyi stratégiáját és a játék értékét lineáris programozás segítségével!
b) Ennek a mátrixjátéknak két megoldása van. Adja meg a másik megoldást is!

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Feladat
Adott egy mátrixjáték A kifizetési mátrixa.
a) Határozza meg a játékosok egyensúlyi stratégiáját és a játék értékét lineáris programozás segítségével!
b) Ennek a mátrixjátéknak két megoldása van. Adja meg a másik megoldást is!

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Feladat
Két játékos (P_1, P_2) 1 vagy 2 forintos pénzérmét tart a markában. Az elrejtett pénzek összegének megfelelő mennyiségű pénzt lehet nyerni. Ha a pénzösszeg páros, akkor P_1 nyer P_2-től, egyébként P_2 nyer P_1-től.
a) Írja fel a játék kifizetési mátrixát!
b) Határozza meg a játékosok egyensúlyi stratégiáját a legegyszerűbb módon!
c) Határozza meg a játékosok egyensúlyi stratégiáját a lineáris programozás segítségével! (az egyszerűbb utat válassza)
d) Írja fel a bonyolultabb alakú LP feladatpárt és a hozzá tartozó induló szimplex táblát!

3. Bimátrixjátékok

Mint ahogy a bevezetőben említettük a mátrixjátékok és a bimátrixjátékok olyan játékok, amelyekben **két játékos** szerepel és a játékosoknak **véges sok** stratégiája van. A két játékot az különbözteti meg egymástól, hogy míg a mátrixjátékoknál a játékosok egymásnak teljesítik kifizetéseiket, azaz egy adott cselekvési lehetőség-párnál az egyik nyeresége ugyanannyi volt, mint a másik vesztesége, addig a bimátrixjátékoknál a kifizetések algebrai összege nem zérus. A játékot két mátrix segítségével írhatjuk le, a P_1 játékos nyereségét az $\mathbf{A}$ mátrixszal, a P_2 játékos nyereségét pedig a $\mathbf{B}$ mátrixszal szoktuk leírni. A bimátrixjátékokban, mivel a játékosok nem egymás rovására növelhetik bevételeiket, együttműködés, kooperáció is elképzelhető. Látható, hogy a bimátrixjátékok bonyolultabbak a mátrixjátékoknál. Külön fogjuk vizsgálni az ún. **nemkooperatív** és a **kooperatív** eseteket. A nemkooperatív megoldásnál a szokásos egyensúlyi stratégiákat keressük, azaz amikor a játékosok egymástól függetlenül döntenek és egyedüli céljuk a saját bevételük növelése. A kooperatív megoldásnál pedig azt vizsgáljuk, hogy érdemes-e a játékosoknak együttműködni, függetlenségüket feladni és ha igen, akkor milyen legyen a közös stratégiájuk? Ekkor tehát a céljuk már nem az egyedi hasznuk, hanem a koalíció együttes hasznának a növelése. Végül a közös haszon elosztásának problémáját is meg kell vizsgálni. Néhány alapelvet tisztázva e kérdésekre is ki fogunk térni érintőlegesen.

3.1. Bimátrixjátékok nemkooperatív megoldása

A megoldást egy példával vezetjük be.

11. Példa

Tekintsük az alábbi konfliktushelyzetet. Két benzinkút van egy országút két oldalán és a környéken más nincs. A két tulajdonos (P_1, P_2) kétféle napi ár között választhat: magas (m) vagy alacsony (a). Minden reggel egymástól függetlenül döntik el, hogy aznap milyen árat írnak ki és napközben nem változtatnak az áron. Mindegyik játékosoknak tehát két-két stratégiája, cselekvési lehetősége van.

Az alábbi táblázatokban közöljük a benzinkutasok napi bevételét (nyereségét) az egyes cselekvési lehetőségek függvényében. A baloldali táblázat a P_1 játékos nyereségét, a jobboldali a P_2 játékos nyereségét mutatja:

		P_2 magas	P_2 alacsony
P_1	magas	10	6
	alacsony	16	7

		P_2 magas	P_2 alacsony
P_1	magas	10	16
	alacsony	6	7

Megoldás:

Mátrixokkal megfogalmazva az alábbi kifizetési mátrixokat kapjuk. Az $\mathbf{A}$ mátrix a P_1 játékos, a $\mathbf{B}$ mátrix a P_2 játékos nyereségét mutatja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 16 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

A konfliktushelyzet nemkooperatív megoldása alatt a játékelméleti bevezetőben megfogalmazott (1) egyensúlypont meghatározását értjük. A nyeregpont, egyensúlypont lehet tiszta vagy kevert stratégiájú. Először próbáljuk meg a tiszta stratégiájú nyeregpontot megkeresni. Legyen ez a sor az i^*, az oszlop pedig a j^*. Ekkor fenn kell állnia az alábbi nyeregponti összefüggéseknek, amelyeket az (1) definícióból írhatunk fel:

$$\begin{aligned} a_{i^*j^*} &\geqq a_{ij^*} \quad \text{minden } i \text{ stratégia esetén}, \\ b_{i^*j^*} &\geqq b_{i^*j} \quad \text{minden } j \text{ stratégia esetén}. \end{aligned} \tag{6}$$

A nyeregponti stratégia, mint ahogy tudjuk olyan stratégia, amelytől egyik játékosnak sem érdemes eltérni, feltéve, hogy az ellenfél nem tér el a nyeregponti stratégiájától. A fenti definícióból kiolvasható, hogy bimátrixjátékok esetén a tiszta stratégiájú nyeregpont olyan pont, amely az $\mathbf{A}$ mátrixban **oszlopmaximum**, a $\mathbf{B}$ mátrixban pedig **sormaximum**. A példában ilyen indexek a $j^* = 2$ és az $i^* = 2$, azaz egyensúly akkor van, ha mindkét benzinkutas alacsony árat ír ki. Az $(i^*, j^*) = (2, 2)$ stratégia valóban egyensúlyi (nyeregpont), hisz ha valamelyik játékos eltér ettől, de a másik nem tér el, akkor rosszabbul jár. Ha például a P_1 játékos magas árat ír ki (eltér egyensúlyi stratégiájától), de a P_2 játékos alacsony árat ír ki (nem tér el egyensúlyi stratégiájától), akkor a P_1 játékosnak 7 helyett csak 6 lesz a bevétele; vagy ha a P_2 játékos ír ki magas árat, P_1 alacsony árat, akkor a P_2 játékosnak lesz 7 helyett 6 a bevétele. A példában könnyű belátni, hogy mindkét játékos jobban jár, ha kooperál egymással. Ha például megegyeznek abban, hogy mindketten magas árat írnak ki, akkor nyereségük $10 - 10$ lesz, szemben a $7 - 7$ egyensúlyi bevétellel. De ha egyik magas, a másik pedig alacsony árat ír ki, akkor összbevételük 22 lesz, ami jobb az előző 20 értékű összbevételnél. Tehát ebben a játékban érdemes együttműködniük. A közös bevételen megosztoznak valahogyan (ezt később ismertetjük). Ha nem tudnak megegyezni, akkor a P_1 játékos alkalmazhat fenyegető stratégiát a P_2 játékos ellen (ha mondjuk a P_1 tőkeerősebb). Tartósan alacsony árat ír ki, ami számára legfeljebb 7 bevételt hoz. Ha például ez veszteség lenne, akkor ellenfele hamarosan tönkremenne, ezért együttműködésre, ill. a P_1 számára kedvező osztozkodásra kényszerülne.

Röviden megemlítünk egy egyszerű módszert az (i^*, j^*) nyeregpont meghatározására. Az (i^*, j^*) nyeregpont az $\mathbf{A}$ mátrixban **oszlopmaximum**, a $\mathbf{B}$ mátrixban **sormaximum**. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix minden **oszlopában**, valamint a $\mathbf{B}$ mátrix minden **sorában** a **legnagyobb** értéket és jelöljük ezeket az elemeket $*$-gal. Így az (i^*, j^*) nyeregpontot az a pont (mátrixelem) adja, amelynél mindkét mátrixban $*$ áll. Természetesen több ilyen pont is lehet.

Végezetül néhány szót szólunk a kevert stratégiákról is. Jelölje az $\mathbf{y}$ vektor a P_1 játékos, az $\mathbf{x}$ vektor pedig a P_2 játékos kevert stratégiáját.

DEFINÍCIÓ (kevert egyensúlyi stratégia):
Egy bimátrixjáték esetén a játékosok **kevert egyensúlyi stratégiái** alatt azt az $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ kevert stratégiákat értjük, amelyekre fennálnak az alábbi egyensúlyi vagy nyeregponti összefüggések:

$$\begin{aligned} \mathbf{yAx}^* &\leqq \mathbf{y}^*\mathbf{Ax}^* && \text{minden } \mathbf{y} \text{ kevertstratégiára,} \\ \mathbf{y}^*\mathbf{Bx} &\leqq \mathbf{y}^*\mathbf{Bx}^* && \text{minden } \mathbf{x} \text{ kevertstratégiára} \end{aligned} \tag{7}$$

Míg a tiszta nyeregpontokat egyszerűen felkutathattuk, addig a kevert stratégiájú nyeregpont meghatározása bonyolultabb feladat. A nyeregpont mátrixjátékoknál lineáris programozási feladattal, bimátrixjátékoknál viszont kvadratikus programozási feladat (lineáris feltételek, kvadratikus célfüggvény) segítségével határozható meg. Az érdeklődők kedvéért közöljük azt a kvadratikus programozási feladatot, amelynek megoldása szolgáltatja a nyeregpontot. A játék értékét a v_1, v_2 helyett az egyszerűség kedvéért jelölje u, v. A P_1 játékos számára a játék értéke $u = \mathbf{y}^*\mathbf{Ax}^*$, a P_2 játékos számára pedig a játék értéke $v = \mathbf{y}^*\mathbf{Bx}^*$. Az alábbi optimalizálási feladat megoldása szolgáltatja a bimátrixjáték megoldását. A nyeregponti stratégiákat az $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ optimális megoldások, a játékosok számára a játék u, v értékét pedig az α^*, β^* optimális megoldások adják.

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{Ax}-\beta\mathbf{1} & \leqq & \mathbf{0} \\
\mathbf{yB}-\alpha\mathbf{1} & \leqq & \mathbf{0} \\
\mathbf{1x} & = & 1 \\
\mathbf{1y} & = & 1 \\
\mathbf{x} & \geqq & \mathbf{0} \\
\mathbf{y} & \geqq & \mathbf{0} \\
\mathbf{y}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x}-\alpha-\beta & \rightarrow & \text{max!}
\end{array}$$

Feladat
Vezesse le az előző fejezetben tárgyalt mátrixjátékokra vonatkozó nyeregponti összefüggéseket a bimátrixjátékokra vonatkozó nyeregponti összefüggésekből. (A mátrixjáték a bimátrixjáték speciális esete, ahol $\mathbf{B} = -\,\mathbf{A}$.)

A mátrixjátékokhoz hasonlóan itt is érvényes az alábbi tétel:

TÉTEL
Tetszőleges **A** és **B** kifizetési mátrixokkal rendelkező bimátrixjátéknak létezik nyeregpontja, azaz létezik olyan $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ stratégiapár, hogy

$$\begin{array}{rcll}
\mathbf{yAx}^* & \leqq & \mathbf{y}^*\mathbf{Ax}^* & \text{minden } \mathbf{y} \text{ kevertstratégiára,} \\
\mathbf{y}^*\mathbf{Bx} & \leqq & \mathbf{y}^*\mathbf{Bx}^* & \text{minden } \mathbf{x} \text{ kevertstratégiára.}
\end{array}$$

Most néhány fontos fogalmat definiálunk, amelyek segítségével eldönthető, hogy a nyeregpont megnyugtató megoldást szolgáltat-e a játékosok számára vagy érdemes kooperálni, együttműködni, mert akkor javíthatnak helyzetükön.

DEFINÍCIÓ (megolodható bimátrixjáték):
Egy nemkooperatív bimátrixjátékot **megoldhatónak** nevezünk, ha minden nyeregpontja rendelkezik a **felcserélhetőségi** és az **ekvivalencia** tulajdonságokkal.

Megjegyzés:
Mátrixjátékoknál több nyeregpont létezése esetén mindig igaz a felcserélhetőségi és az ekvivalencia tulajdonság (5. és 6. tulajdonság). Bimátrixjátékoknál azonban nem minden esetben állnak fenn ezek a tulajdonságok, így bimátrixjátékok esetében az sem mindig egyértelmű, hogy a játékosok több nyeregpont esetén melyik nyeregpontot válasszák.

12. Példa
Adott egy bimátrix játék két mátrixa. Vizsgáljuk meg, hogy a bimátrix játékban érvényes-e a felcserélhetőségi tulajdonság és az ekvivalencia tulajdonság!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás:
Két tiszta stratégiájú nyeregpont van: $(i^*, j^*) = (1, 1)$ és $(i^*, j^*) = (2, 2)$. Az (i, j) stratégiajelölésben az első index a P_1 játékos stratégiáját, a második index pedig a P_2 játékos

stratégiáját jelenti. (Gyakorlásképpen keressük meg mindkettőt). Mint tudjuk a mátrixjátékok esetén mindig érvényes a felcserélhetőségi tulajdonság, ebben a bimátrixjáték példában nem igaz. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a felcserélt stratégiák, azaz az $(1, 2)$, ill. a $(2, 1)$ stratégiák már nem nyeregpontok. Mátrixjátékoknál az ekvivalencia tulajdonság is mindig érvényes, példánkban ez sem igaz, hiszen $u_1 = 4 \neq 2 = u_2$, ill. $v_1 = 2 \neq 4 = v_2$.

DEFINÍCIÓ (domináns stratégia):
Egy bimátrixjátékban az $(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{y}_1^*)$ stratégiapár **dominálja** az $(\mathbf{x}_2^*, \mathbf{y}_2^*)$ stratégiapárt, ha

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1^* \mathbf{A} \mathbf{x}_1^* &\geqq \mathbf{y}_2^* \mathbf{A} \mathbf{x}_2^* \quad \text{és} \\ \mathbf{y}_1^* \mathbf{B} \mathbf{x}_1^* &\geqq \mathbf{y}_2^* \mathbf{B} \mathbf{x}_2^* \ . \end{aligned}$$

DEFINÍCIÓ (domináns pont):
Egy olyan stratégiapárt, amelyet egyetlen más stratégiapár sem dominál **domináns pontnak** nevezünk.

13. Példa
Adott egy bimátrixjáték két mátrixa. Vizsgáljuk meg, hogy megoldható-e a bimátrixjáték és van-e dominancia!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:
A bimátrixáték egyetlen nyeregponttal rendelkezik, az $(1, 1)$ ponttal, így a definíció értelmében ez a mátrixjáték megoldható. A $(2, 2)$ pont dominálja az $(1, 1)$ pontot, ami azt jelenti, hogy a játékosok számára a $(2, 2)$ stratégia választása előnyösebb, mint az $(1, 1)$ nyeregponti stratégia.

DEFINÍCIÓ (szigorúan megoldható bimátrixjáték):
Egy nemkooperatív bimátrixjátékot **szigorúan megoldhatónak** mondunk, ha **megoldható** és **van domináns nyeregpontja**.

5. TÉTEL
A **szigorúan megoldható bimátrixjátékoknál** a nyeregpont megnyugtató megoldást ad, tehát a játékosoknak **nem érdemes** együttműködni, kooperálni. Viszont a nem szigorúan megoldható bimátrixjátékok esetén érdemes a játékosoknak együttműködni, mert ezáltal növelni tudják együttes nyereségüket.

14. Példa
Egy kis cég (P_1) nagy mennyiségű árut akar eladni egy nagy cég (P_2) által uralt két piac valamelyikén. E célból P_1 reklámhadjáratot akar indítani valamelyik piacon, P_2 pedig szintén reklámhadjárattal szeretné megvédeni egyik piacát. Ha ugyanazon a piacon folytatnak reklámhadjáratot, akkor P_1 veszít. Az első piacon drágább a reklámhadjárat, de a piac elnyerése kétszer nagyobb hasznot biztosít, mint a második piac elnyerése (2, ill. 1 egységgel számoljunk). Az első piacért folytatott harc elvesztése a kis cég számára nagy veszteséget (10 egység) jelent, míg a nagy cég számára az első piac megtartása 5 egység nyereséget jelent. Melyik piacon indítson a P_1, ill. a P_2 cég reklámhadjáratot? Érdemes-e a cégeknek kooperálni?

Megoldás:
Mindkét cégnek két tiszta stratégiája van: egyik stratégia: első piacon folytatja a reklámhadjáratot, másik stratégia: második piacon folytatja a reklámhadjáratot. A kifizetési mátrixok az alábbiak:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A bimátrixjátéknak egyetlen kevert egyensúlyi stratégiája van:
P_1 egyensúlyi stratégiája: $\mathbf{y}^* = (2/9,\ 7/9)$, $\quad u = \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^* = -\,4/7$,
P_2 egyensúlyi stratégiája: $\mathbf{x}^* = (3/14,\ 11/14)$, $\quad v = \mathbf{y}^*\mathbf{B}\mathbf{x}^* = 1/3$.
Egyszeri lejátszáskor a kevert stratégiákban nagyobb valószínűséggel szereplő tiszta stratégiát kell a játékosoknak választaniuk. Eszerint a második piacon ajánlatos mindkét cégnek a reklámhadjáratot lefolytatni. A játék szigorúan megoldható és a kis cég számára igazságtalan. Nem érdemes együttműködni.

15. Példa (Fogolydilemma)
Ebben a példában a játékelmélet leghíresebb játékát ismertetjük. Merrill M. Flood and Melvin Dresher vetették fel először a kooperáció és konfliktus helyzetek alapmodelljét. A problémáról az első cikket Albert William Tucker (1905-1995) írta 1950-ben. Tucker adta a konfliktushelyzetnek a **Fogolydilemma** nevet és a konfliktushelyzetet egy "kis krimi" formájában fogalmazta meg.

Tucker volt egyébként a nemlineáris optimalizálásban használatos Karush-Kuhn-Tucker tétel egyik felfedezője. Tuckernek PhD tanítványa volt John Forbes Nash, akiről a Nash-féle egyensúlypont kapta a nevét. Nash 1994-ben közgazdasági Nobel-díjat kapott.

E kis történeti bevezető után ismertetjük a Fogolydilemma néven ismert konfliktushelyzetet. Nem ragaszkodunk ahhoz, hogy szószerint ismertessük Tucker történetét, a probléma megértésére törekszünk.

A rendőrség letartóztat két régóta körözött személyt, akik együtt egy súlyos bűnt (bankrablást) követtek el. A rendőrségnek nem áll rendelkezésére közvetlen bizonyíték a két gyanúsított ellen, csak egy gyorshajtást tudnak rájuk bizonyítani. Elítélésükhöz nincs elegendő tárgyi bizonyíték, szükség van legalább az egyikük beismerő vallomására. A vizsgálóbíró úgy dönt, hogy külön börtöncellába zárja őket és mindkét fogolynak egyenként a következő ajánlatot teszi:

- Ha te bevallod a bankrablást, társad viszont tagad, akkor téged szabadon bocsátalak, őrá pedig 10 év börtönbüntetést szabok ki.
- Ha a társad tesz vallomást és te tagadsz, akkor őt bocsátom szabadon, s te kapsz 10 évet.
- Ha mindketten vallomást tesztek, akkor nem sokat ér a te vallomásod, hiszen anélkül is tudunk mindent, ekkor 5-5 évet kaptok.
- Ha egyikőtök sem tesz vallomást, akkor a bankrablást megússzátok, de a gyorshajtásért 1-1 évet kaptok.
- Tájékoztatlak, hogy a társadnak ugyanezt az ajánlatot tettem.
- 24 órád van a válaszadásig, de természetesen nem beszélhettek egymással.

Megoldás:
A konfliktushelyzetet foglaljuk két táblázatba, az első táblázatban az egyik gyanúsított (P_1), a másodikban pedig a másik gyanúsított (P_2) büntetését írtuk attól függően, hogy vallanak vagy nem vallanak.

	vall	nem vall
vall	5	0
nem vall	10	1

	vall	nem vall
vall	5	10
nem vall	0	1

A kifizetési mátrixok ezekután az alábbiak szerint írhatók:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Próbáljunk meg a gyanúsítottak fejével gondolkodni.
Ha **társam vall**, akkor két eset lehet: ha én is **vallok**, akkor **5** évet kapok, ha én **nem vallok**, akkor **10** évet kapok. Ha tehát **társam vall**, akkor jobb, ha **én is vallok** hiszen kevesebb büntetést kapok.
Ha társam **nem vall**, akkor szintén két eset lehet: ha én **vallok**, akkor **0** évet kapok, ha én **nem vallok**, akkor **1** évet kapok. Ha tehát társam **nem vall**, akkor jobb, ha **én vallok** hiszen így szabadon engednek.
Tehát mindketten vallani fognak, ekkor 5-5 évet kapnak. Ha egyikük sem vallott volna, akkor 1-1 évvel megúszták volna. Ezt nevezzük Fogolydilemmának.

3.2. Bimátrixjátékok kooperatív megoldása

Mint láttuk, ha a bimátrixjáték **nem szigorúan megoldható**, akkor **érdemes** a játékosoknak **együttműködni**, ezáltal növelni tudják együttes nyereségüket. Ilyenkor a két játékos koalíciót alkot és céljuk az együttes hasznuk növelése lesz. Nyilvánvaló, hogy az együttes haszonból legalább annyit kell kapnia mindkét játékosnak, mint amit egymástól függetlenül cselekedve biztosítani tudna magának, hisz egyébként nincs értelme a koalíció megalakításának.

16. Példa
Egy házaspár este szórakozni akar menni valahová. A férj egy ökölvívó meccsre ($ö$) a feleség pedig színházba (sz) szeretne menni. Ha nem tudnak megegyezni, akkor otthon maradnak, de ezt kevesebbre értékelik mintha elmennének. Ha a színház mellett döntenek, a feleségnek mondjuk 2 egységet, a férj számára 1 egységet jelent. Ha az ökölvívó meccs mellett döntenek, ez a feleségnek 1, a férjnek pedig 2 egységet jelent. Az otthonmaradást mindegyikük -1 egységgel értékelik. Legyen a P_1 játékos a férj, a P_2 játékos pedig a feleség. Az alábbi kifizetési mátrixokat lehet felírni:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás:
A bimátrixjátékot megoldva három nyeregpont adódott, ebből kettő tiszta és egy kevert stratégiájú:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^* &= (1,0), & \mathbf{y}_1^* &= (1,0), & u_1 &= 2, & v_1 &= 1 \\ \mathbf{x}_2^* &= (0,1), & \mathbf{y}_2^* &= (0,1), & u_2 &= 1, & v_2 &= 2 \\ \mathbf{x}_3^* &= (3/5,2/5), & \mathbf{y}_3^* &= (2/5,3/5), & u_3 &= 1/5, & v_3 &= 1/5 \end{aligned}$$

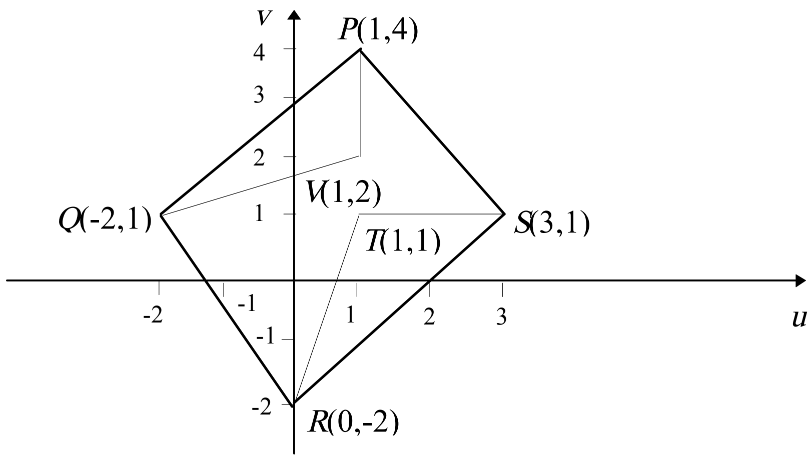
A fenti bimátrixjáték nem megoldható. Mivel a nyeregpontok nem felcserélhetők és nem ekvivalensek, ezért az 5. tétel szerint csak az együttműködés adhat megnyugtató megoldást (Az életben is így van!)

Egy bimátrixjáték kooperatív megoldásánál az alábbiakra kell választ adnunk:
– hogyan válasszák meg a játékosok a stratégiájukat az együttes hasznuk növelésére?
– hogyan osszák el a játékosok az együttes hasznot egymás között?
Számos elképzelés van ezeknek a kérdéseknek a megválaszolására. Az alábbiakban a megoldás alapjainak ismertetésével foglalkozunk.

Tekintsük a következő bimátrixjátékot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ábrázoljuk egy (u, v) derékszögű koordinátarendszerben az egyes tiszta stratégiapároknak megfelelő nyereségeket. A vízszintes tengelyre a P_1 játékos u nyereségét, a függőleges tengelyre pedig a P_2 játékos v nyereségét tüntetjük fel. Az $(1, 1)$ stratégiapárnak a $P(1, 4)$ pont, az $(1, 2)$ stratégiapárnak az $Q(-2, 1)$ pont, az $(1, 3)$ stratégiapárnak a $V(1, 2)$ pont felel meg, stb. A jelölésünkben az (i, j) stratégiapár azt jelenti, hogy a P_1 játékos az i-edik sort, a P_2 játékos a j-edik oszlopot választja.



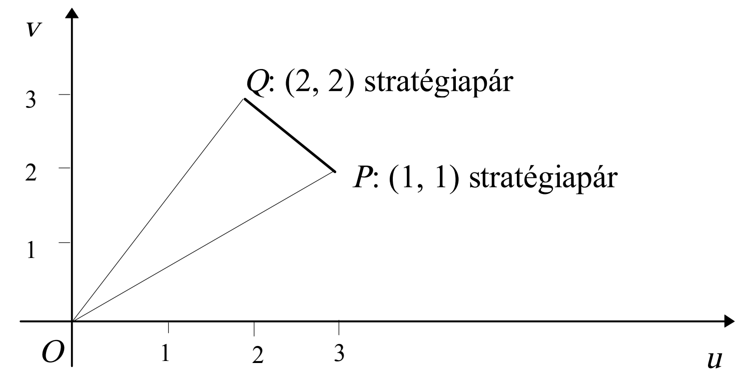
A P, Q, R, S, T, V pontok a játékosok valamilyen tiszta stratégiájával érhetők el. A pontok közötti szakaszok pontjai pedig kevert stratégiával érhetők el. A PQ szakasz pontjai az $(1, 1)$ és az $(1, 2)$ stratégiapárok alkalmas keverésének felelnek meg, azoknak a stratégiáknak, amikor a P_1 játékos az 1. sort választja, a P_2 játékos pedig az 1. és a 2. oszlopot keveri. Hasonlóan a PQV háromszög minden pontja is elérhető, ha P_1 az 1. sort választja, P_2 pedig az 1., 2., 3. oszlopot keveri. Látható, hogy a kialakult $PQRS$ poligon (amely egy korlátos, zárt, konvex poliéder) minden pontja elérhető valamilyen kevert stratégiával.

DEFINÍCIÓ (kifizetési, nyeremény poligon):
Azt a korlátos, zárt, konvex poliédert nevezzük **kifizetési poligonnak** vagy **nyeremény poligonnak**, amelynek minden pontja elérhető a játékosok valamilyen kevert stratégiájával.

A bimátrixjáték kooperatív megoldásának az első kulcskérdése, hogy a poligon melyik pontját tekintsék a játékosok az együttműködve, közösen eldöntött stratégiájuknak?

Az egyszerűség kedvéért nézzük az alábbi 2×2-es bimátrixjátékot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

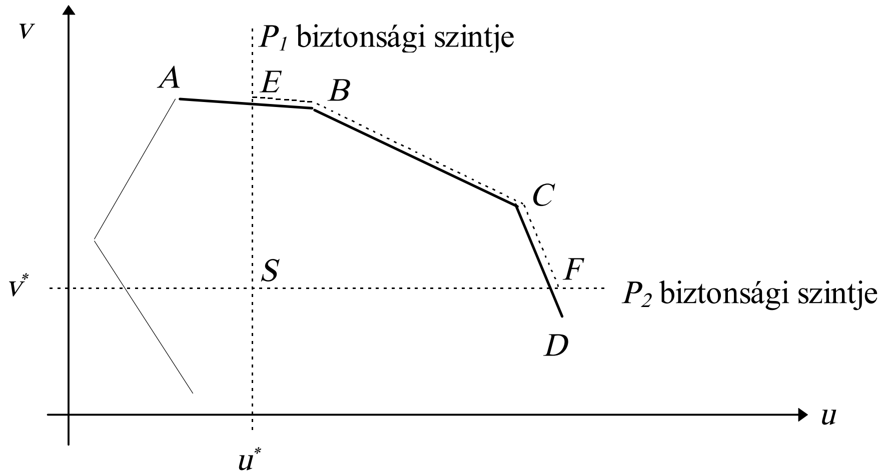


Az PQO háromszög minden pontja szóba jöhet a bimátrixjáték valamilyen kevert stratégiájaként, de a belső pontok a kooperatív játék megoldásához nem jók, hisz azokat dominálják a határoló vonalak. A PQ szakasz pontjai az PQO háromszög összes többi pontját dominálják (a szakasz pontjai egymást nem dominálják), hisz a PQ szakaszon legalább az egyik játékos nyeresége nagyobb lesz, mint más pontban.

DEFINÍCIÓ (Pareto-optimális halmaz):
A kifizetési poligon azon pontjait, amelyek az összes többi pontot **dominálják**, egymást viszont nem dominálják, **Pareto-optimális halmaznak** nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a Pareto-optimális halmaz mindig a határon van. Összegezve tehát a Pareto-optimális halmaz minden pontja megoldása lehet a kooperatív játéknak. A játékosok az alábbi lehetőségek közül választhatnak:
– vagy megállapodnak abban, hogy az $(1, 1)$ vagy a $(2, 2)$ stratégiapárt játsszák és a hasznon osztozkodnak,
– vagy felváltva váltogatják az $(1, 1)$ és a $(2, 2)$ stratégiapárt.

Ne feledkezzünk meg azonban arról, hogy a játékosoknak csak akkor érdemes kooperálni, ha legalább annyit nyernek, mint anélkül.
Legyen adott például az alábbi kifizetési poligon:



A példában a Pareto-optimális halmaz az $ABCD$ poligonszakasz. Ha a játékosok egymástól függetlenül a saját mátrixukon oldanák meg a mátrixjátékot (nem bimátrix nyeregpontot, hanem zérusösszegű mátrixjáték nyeregpontját keresnék), akkor a P_1 játékos u^*, a P_2 játékos pedig v^* nyereséget érhetne el, ahol az u^* az **A** mátrixra vonatkozó játékértéket, a v^* a **B** mátrixra vonatkozó játékértéket jelöli. Az ábrán S-el jelölt (u^*, v^*) pontot a játékosok **biztonsági (maximin) status quo pontjának** nevezzük. Tehát nem minden Pareto-optimális pont fogadható el kooperatív megoldásnak, csak azok, amelyek a biztonsági status quo pont "felett" vannak, jelen példában az $EBCF$ poligonszakasz. A Pareto-optimális halmaz biztonsági szintek közé eső részét **megállapodásos halmaznak** nevezzük. Csak ezeket fogadhatjuk el a bimátrixjáték kooperatív megoldásának. Például a P_1 játékos szívesen választaná a D pontot, de a P_2 játékos megakadályozhatja egy nem bimátrix egyensúlyi stratégia alkalmazásával. Az alábbiakban néhány megoldási koncepciót ismertetünk:

1. Neumann-Morgenstern megoldás

A Neumann-Morgenstern elv a bimátrixjáték kooperatív megoldásának az **egész megállapodásos halmazt** tekinti.

Ennek az elvnek az a problémája, hogy nem ad útmutatást arra, hogy a játékosok melyik pontot válasszák. A következő megoldási koncepciók kiválasztanak egy pontot a megállapodásos halmazból.

2. Megoldásfüggvényen alapuló megoldás

A megállapodásos halmaz azon pontját keresik, amelyben az $S(u, v)$ ún. **megoldásfüggvény** értéke a legnagyobb, ahol

$$S(u, v) = (u - \tilde{u})(v - \tilde{v}).$$

Az $(\tilde{u}, \tilde{v})$ egy adott status quo pont, amely azt jelenti, hogy amennyiben a játékosok nem tudnak megegyezésre jutni, akkor az $(\tilde{u}, \tilde{v})$ pontnak megfelelő stratégiákat választják. A megoldásfüggvény a játékosok azon törekvését fejezi ki, hogy egy $(\tilde{u}, \tilde{v})$ kifizetésnél alkalmasabb $(\hat{u}, \hat{v})$ kifizetést valósítsanak meg a kooperációjuk során. Az alábbiakban két megoldás-koncepciót közlünk, amelyek csupán az $(\tilde{u}, \tilde{v})$ status quo pont megválasztásában különböznek.

a) Shapley-féle megoldás

Itt az $(\tilde{u}, \tilde{v})$ status quo pontnak az (u^*, v^*) biztonsági status quo pontot választjuk.

b) Nash-féle megoldás

Itt az $(\tilde{u}, \tilde{v})$ status quo pontnak a legjobb fenyegető stratégiának megfelelő pontot választjuk. Fenyegető stratégia alatt azt értjük, amely az ellenfélnek a legtöbb kárt okozza függetlenül a saját veszteségtől. (Ennek megkeresése nem könnyű feladat, a jegyzetben nem foglalkozunk vele.)

A Shapley-féle koncepció egyenlő osztozkodást tételez fel. A Nash-féle megoldásban a játékosok agresszívabbak, mindkettő arra törekszik, hogy az elérhető maximális közös bevételen való osztozkodás során a ráeső rész minél nagyobb legyen.

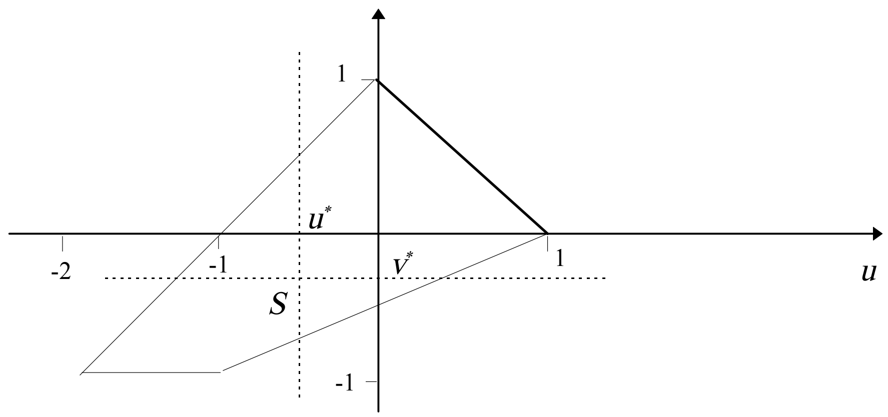
17. Példa

Határozzuk meg az alábbi 2×2-es bimátrixjáték kooperatív megoldását a Shapley-féle koncepció alapján:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Először meghatározzuk a biztonsági status quo pontot, azaz az **A** és a **B** mátrixok nyeregpontjaihoz tartozó u^*, v^* játékértékeket. A 2×2-es mátrixméretek miatt a számolás egyszerűen elvégezhető. A biztonsági status quo pont (S): $u^* = -1/2$, $v^* = -1/3$. A megoldást az alábbi ábra szemlélteti:



A Shapley-féle megoldásfüggvény az alábbi formában írható fel:

$$S(u, v) = (u - u^*)(v - v^*) = (u + 1/2)(v + 1/3).$$

A megoldandó optimalizálási feladat tehát:

$$\begin{aligned} u + v &= 1 \\ u, v &\geqq 0 \\ (u + \frac{1}{2})(v + \frac{1}{3}) &\to \text{max!} \end{aligned}$$

A Shapley-féle koncepció alapján a megoldás: $\hat{u} = 5/12$, $\hat{v} = 7/12$.

Végül arra adunk választ, hogyan érhetik el a játékosok az $\hat{u}, \hat{v}$ nyereségüket. Ezt többféleképpen is elérhetik, megállapodhatnak például az alábbi két módon:

a) Az $(1, 1)$ és a $(2, 2)$ stratégiapárokat $5/12$, ill. $7/12$ valószínűséggel játsszák ($5 : 7$ arányban keverik), majd a nyereményen egyenlő mértékben osztoznak.

b) Az $(1, 1)$ és a $(2, 2)$ stratégiapárokat felváltva játsszák és a P_1 játékos $7/12$, a P_2 játékos pedig $5/12$ kompenzációt fizet a másiknak minden játszma után.

1. Feladat

Határozzuk meg az alábbi 3×2-es bimátrixjáték kooperatív megoldását a Shapley-féle koncepció alapján:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Feladat

Adja meg az alábbi bimátrixjáték Neumann-Morgenstern- és Shapley-féle kooperatív megoldását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$