KONVEX HALMAZ, FARKAS TÉTEL, GORDAN TÉTEL, EXTREMÁLIS PONT, EXTREMÁLIS IRÁNY, LINEÁRIS PROGRAMOZÁS ELMÉLETE

DR. NAGY TAMÁS
egyetemi docens

Miskolci Egyetem
Alkalmazott Matematikai Tanszék

„A bemutatott kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg"
„This research was carried out as part of the TAMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 project with support by the European Union, co-financed by the European Social Fund."

Miskolc, 2012

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Legyen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz és $f : S \to \mathbb{R}$ függvény. Feladatunk, hogy meghatározzuk azt az S halmazbeli n-dimenziós $\mathbf{x}$ vektort, amelynél az n-változós $f(\mathbf{x})$ valós függvény a legkisebb értéket veszi fel, képletben a feladat:

$$\min \{ f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S \} .$$

A fenti optimalizálási feladatot matematikai programozási feladatnak nevezzük. Ahhoz, hogy egy ilyen feladat megoldásához hozzá tudjunk fogni, ismereteket kell szereznünk a halmazokról és a függvényekről. Ebben a tananyagban a halmazokra, pontosabban a konvex halmazokra vonatkozó legfontosabb ismereteket közöljük.

2. Alapvető definíciók

A fejezet elején alapvető fogalmakat ismertetünk, majd az optimalizálásban fontos szerepet játszó konvex halmazokkal foglalkozunk.

2.1. Lineáris kombinációk

Legyenek adottak az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok és a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ skalár számok. A $\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k$ vektort az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorok $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ számokra vett lineáris kombinációjának nevezzük.

Amennyiben az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorokat egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix oszlopaiba, a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ számokat pedig egy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ vektorba foglaljuk, akkor a lineáris kombinációt a $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mátrix-vektoros megfogalmazással is felírhatjuk.

A lineáris kombinációban szereplő számok értékétől függően többféle lineáris kombinációt különböztetünk meg, ezek közül a legjelentősebbek az alábbiak:

Ha $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geqq 0$, akkor **nemnegatív lineáris kombináció**ról (röviden nemnegatív kombinációról),

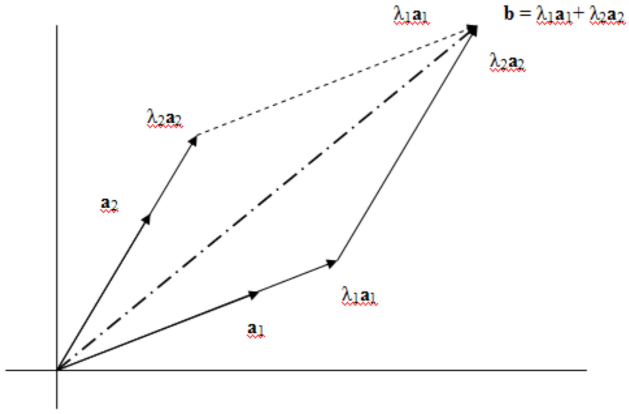
ha $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1$, akkor **affin lineáris kombináció**ról (röviden affin kombinációról),

ha $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geqq 0$ és $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1$, akkor pedig **konvex lineáris kombináció**ról (röviden konvex kombinációról) beszélünk.

Példa

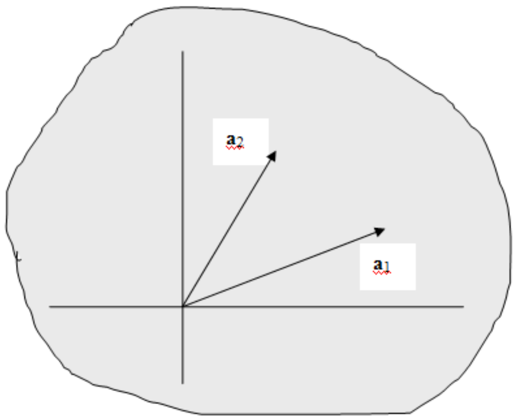
Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ teret és abban két, nem egy egyenesen lévő vektort, legyenek ezek az $\mathbf{a}_1$ és az $\mathbf{a}_2$ vektorok. Tekintsünk két valós számot, legyenek ezek λ_1, λ_2.

A két vektornak a két valós számra vett lineáris kombinációját, a $\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$ vektort, grafikusan a paralelogramma átlójaként határozzuk meg:

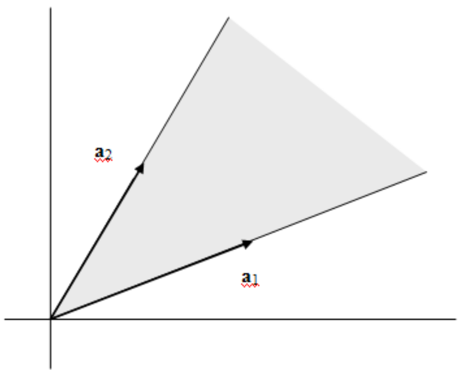


Ha az adott vektoroknak más-más λ_1, λ_2 számokra vesszük a lineáis kombinációját, akkor más-más **b** vektort kapunk. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a négyféle lineáris kombináció esetén a **b** vektorok összességeként milyen vektorhalmaz adódik az $\mathbb{R}^2$ térben.

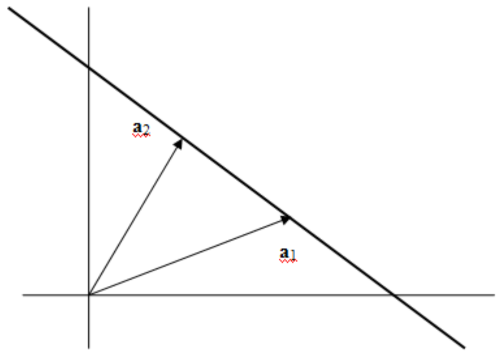
a) Tetszőleges lineáris kombináció esetén a **b** vektorok összessége maga az $\mathbb{R}^2$ tér.



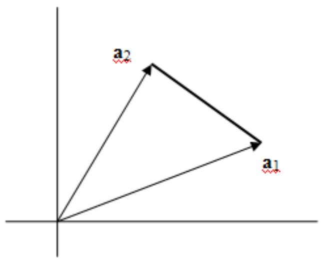
b) Tetszőleges nemnegatív kombináció esetén a **b** vektorok összessége a két vektor meghosszabbításaként adódó félegyenesek által alkotott szögtartomány (kúp, kónusz).



c) Tetszőleges affin kombináció esetén a **b** vektorok összessége a két vektor végpontján átmenő egyenes. Legyen $\lambda_1 = \lambda \in \mathbb{R}$, ekkor $\lambda_2 = 1 - \lambda \in \mathbb{R}$. A lineáris kombináció ekkor: $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}_1 + (1-\lambda)\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 + \lambda(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)$. Az $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ különbségvektor az $\mathbf{a}_2$ vektorból az $\mathbf{a}_1$ vektor irányába mutató vektor. Ebből pedig már könnyen látható, hogy tetszőleges λ esetén a **b** vektorok összessége valóban egy egyenesen helyezkedik el.



d) Tetszőleges konvex kombináció esetén pedig a $\mathbf{b}$ vektorok összessége a kúp és az egyenes közös része, azaz a két vektor végpontját összekötő egyenes szakasz.



Feladat:

Vizsgálja meg azokat az eseteket, amikor a két vektor egy egyenesen van vagy kettőnél több tetszőleges helyzetű vektor van.

2.2. Két pontot összekötő egyenes szakasz

Legyen $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ pontokat összekötő egyenes szakasz tetszőleges $\mathbf{x}$ pontja az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ vektorok konvex kombinációja, azaz

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{a}_2,$$

ahol $\lambda \in [0, 1]$. Ezt már tapasztaltuk az $\mathbb{R}^2$ térben is, csak ott λ_1, λ_2 számokat használtunk.

2.3. Lineáris és affin függőség és függetlenség fogalma

Először definiáljuk a vektorok függőségét, majd a függetlenségét. Röviden azt mondhatjuk, hogy függetlennek nevezzük a vektorokat, ha azok nem függőek.

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függőek, ha közülük valamelyik előállítható az összes többi vektor lineáris kombinációjaként.

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha közülük egyik sem állítható elő az összes többi vektor lineáris kombinációjaként.

Másképpen megfogalmazva:

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függőek, ha a $\mathbf{0}$ vektor nem csak az ún. triviális lineáris kombinációval állítható elő, azaz $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ nem csak $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$ esetén áll fenn.

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a $\mathbf{0}$ vektor csak az ún. triviális lineáris kombinációval állítható elő, azaz $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ csak $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$ esetén áll fenn.

Ha a lineáris kombinációra a már megismert mátrix-vektoros jelölést használjuk, akkor a lineáris függetlenséget megfogalmazhatjuk az alábbiak szerint. Az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai lineárisan függetlenek, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ triviális megoldása van.

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok affin függőek, ha közülük valamelyik előállítható az összes többi affin kombinációjaként.

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok affin függetlenek, ha közülük egyik sem állítható elő az összes többi affin kombinációjaként.

Másképpen megfogalmazva:

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok affin függőek, ha a $\mathbf{0}$ vektor (azaz $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$) csak olyan lineáris kombinációval állítható elő, amelynél $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 0$ és nem mindegyik $\lambda_i = 0$.

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok affin függetlenek, ha a $\mathbf{0}$ vektor (azaz $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$) csak olyan lineáris kombinációval állítható elő, amelynél $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k \neq 0$.

Az affin függetlenségre szokásos az alábbi megfogalmazás is.

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok affin függetlenek, ha az $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1$ vektorok lineárisan függetlenek.

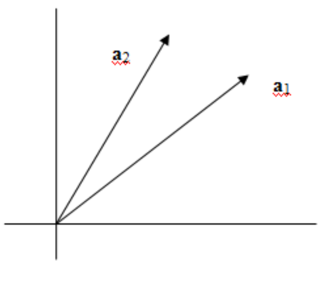
Az affin függőség első definíciója szerint pl. az $\mathbf{a}_1 = \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k$ előállítható úgy, hogy $\lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_k = 1$. A $\lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_k = 1$ összefüggésből következik, hogy nem mindegyik $\lambda_i = 0$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. Az $\mathbf{a}_1 = \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k$ előállítást írjuk át a $\mathbf{0}$ vektor előállítására: $\mathbf{0} = \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k - 1\mathbf{a}_1$, amely írható, hogy $\lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 + \ldots + \lambda_k\mathbf{a}_k - (\lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_k)\mathbf{a}_1 = \lambda_2(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) + \lambda_3(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1) + \ldots + \lambda_k(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1)$. Mivel nem mindegyik $\lambda_i = 0$, ebből a $k - 1$ darab vektor lineáris függősége következik.

Itt is használhatjuk a mátrix-vektoros jelölést. Eszerint az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai affin függetlenek, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak az $\mathbf{ex} \neq 0$ megoldása van, ahol $\mathbf{e} = (1, 1, \ldots 1, \ldots, 1, 1)$ az összegező vektor.

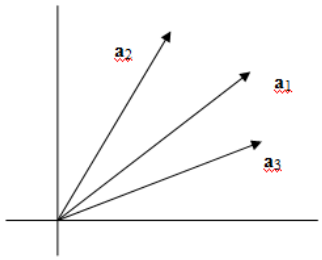
Példa:

A következő ábrákban az $\mathbb{R}^2$ térben bemutatjuk a lineáris és az affin függetlenséget.

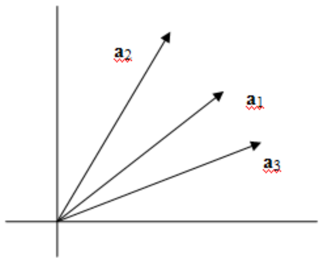
Az alábbi ábrában szereplő $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorok lineárisan függetlenek és affin függetlenek.



Az alábbi ábrában szereplő $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vektorok lineárisan függőek, de affin függetlenek.



Az alábbi ábrában szereplő $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vektorok lineárisan függőek és affin függőek. Ha az $\mathbf{a}_1$ vektor az $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vektorokat összekötő egyenesen bárhol helyezkedik el, akkor mindig affin függő az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vektor.



Feladat:
Igazolja az állításokat a megismert különböző definíciók segítségével is! Vizsgálja meg több vektor különböző helyzetének eseteit is!

Megjegyezzük, hogy ha a vektorok lineárisan függetlenek, akkor affin függetlenek is, fordítva nem igaz az állítás.

2.4. Két pont távolsága és a vektor hossza

Az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ pontok távolságát a következő kifejezéssel definiáljuk:

$$d = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = \sqrt{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)},$$

azaz az $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ különbségvektor önmagával vett skaláris szorzatából vont négyzetgyök.

Egy vektor hossza alatt a nullvektortól való távolságát értjük, azaz

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}}.$$

2.5. Környezet, belső pont, határpont, halmaz lezártja, zárt és nyílt halmaz, korlátos halmaz, kompakt halmaz fogalma

Környezet
Az $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ pont ε sugarú (nyitott) környezetén azon vektorok összességét értjük, amelyek $\bar{\mathbf{x}}$ vektortól való távolsága ε-nál kisebb, vagyis egy $\bar{\mathbf{x}}$ középpontú n-dimenziós gömb belsejében vannak. A környezetet $K_\varepsilon(\bar{\mathbf{x}})$ szimbólummal szokás jelölni, képletben

$$K_\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0\}.$$

Az alábbi fogalmak mindegyikénél legyen adott egy $S \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz. Ezzel a halmazzal kapcsolatban adjuk meg a definíciókat.

Belső pont

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz. Az $\mathbf{x} \in S$ az S halmaz belső pontja, ha van olyan $\varepsilon > 0$ környezete, amelynek minden pontja az S halmazhoz tartozik, azaz ha $K_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset S$ valamilyen $\varepsilon > 0$-ra. A belső pontok halmazát $int\, S$ szimbólummal jelöljük.

Határpont

Az $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pont az S halmaz határpontja, ha bármely $\varepsilon > 0$ környezetében van legalább egy S-hez tartozó és legalább egy S-hez nem tartozó pont is. Az S halmaz határpontjainak halmazát ∂S szimbólummal jelöljük. Figyeljük meg, hogy az S halmaz határpontja nem szükségképpen eleme az S halmaznak.

Halmaz lezártja

Egy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pontról azt mondjuk, hogy az S halmaz lezártjában van, ha $S \cap K_\varepsilon(\mathbf{x}) \neq \emptyset$ bármely $\varepsilon > 0$ számra. A S halmazt lezáró halmazt $cl\, S$ szimbólummal jelöljük.

Zárt és nyílt halmaz

Ha $S = cl\, S$, akkor az S halmaz zárt. Más megfogalmazásban: Egy S halmaz akkor és csak akkor zárt, ha az S halmaz az összes határpontját tartalmazza.

Ha $S = int\, S$, akkor az S halmaz nyílt. Más megfogalmazásban: Egy S halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha az S halmaz egyik határpontját sem tartalmazza.

Korlátos halmaz

Az S halmaz korlátos, ha megadható olyan pozitív k korlát, hogy bármely $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ esetén $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| < k$, ellenkező esetben az S halmaz nem korlátos. Azt is mondhatjuk, hogy S korlátos, ha véges sugarú n-dimenziós gömbbe befoglalható.

Kompakt halmaz

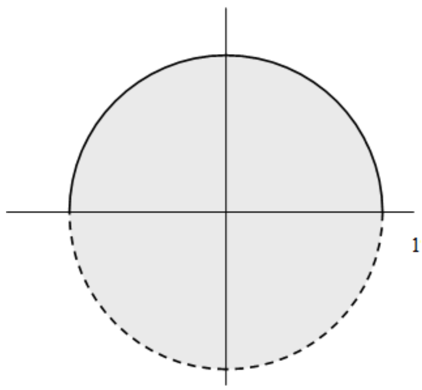
Az S halmazt kompaktnak nevezzük, ha korlátos és zárt.

Példa

Tekintsük az alábbi $\mathbb{R}^2$-ben lévő halmazt:

$$S = \left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leqq 1, \text{ ha } x_2 \geqq 0 \text{ és } x_1^2 + x_2^2 < 1, \text{ ha } x_2 < 0\right\}.$$

Az S halmaz az (x_1, x_2) síkban egy olyan egységsugarú körlap, amelynek az x_1 tengelyen, ill. az x_1 tengely feletti részen a körív pontjait is tartalmazza, míg az x_1 tengely alatti részen a körív pontjait nem tartalmazza.



Az S halmazhoz tartozó belső pontok halmaza, a határpontok halmaza és a halmaz lezártja az alábbi:

$$\begin{aligned} int\ S &= \left\{(x_1,x_2) : x_1^2+x_2^2<1\right\}, \\ \partial\, S &= \left\{(x_1,x_2) : x_1^2+x_2^2=1\right\}, \\ cl\ S &= \left\{(x_1,x_2) : x_1^2+x_2^2\leqq 1\right\}. \end{aligned}$$

Szavakban $int\ S$ a körlap belseje, $\partial\, S$ a körlap körívének összes pontja, $cl\ S$ pedig a körlap belseje és körívének összes pontja. Ez az S halmaz sem nem zárt, sem nem nyílt, mivel $S \neq cl\, S$, ill. $S \neq int\, S$.

Példa

Az $\mathbb{R}^2$-beli $S = \{(x_1,x_2) : x_1^2+x_2^2 \leqq 1\}$ halmaz határpontjainak halmaza

$\partial\, S = \{(x_1,x_2) : x_1^2+x_2^2 = 1\}$, viszont az $\mathbb{R}^3$-beli $S = \{(x_1,x_2,0) : x_1^2+x_2^2 \leqq 1\}$ halmaz határpontjainak halmaza $\partial\, S = \{(x_1,x_2,0) : x_1^2+x_2^2 \leqq 1\}$, tehát önmaga.

Megjegyzések:

a) $int\ S = S \setminus \partial\, S$, de általában csak az igaz, hogy $S \neq int\ S \cup \partial\, S$, ill. $\partial\ S \neq S \setminus int\ S$, az egyenlőség azért nem teljesül mindig, mert a határpont nem szükségképpen eleme a halmaznak. Ezt tapasztaljuk az előző példán. Az $S = \{(x_1,x_2) : x_1^2+x_2^2 \leqq 1\}$ halmaz esetén az egyenlőség már fennáll.

b) $cl\ S = S \cup \partial\, S$.

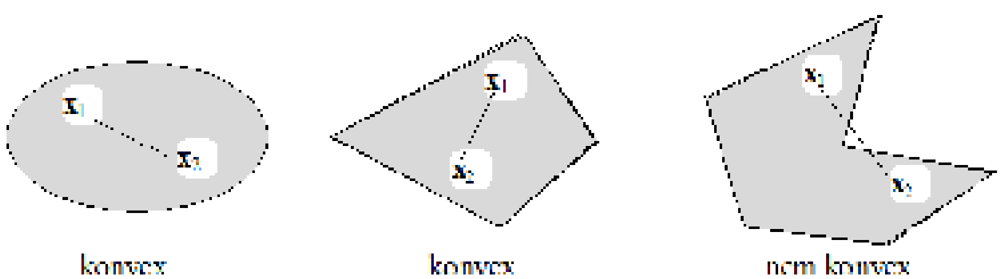
c) Az $\mathbb{R}^n$ és a $\emptyset$ (üres) halmazok zártak és nyíltak is egyben. $\partial\mathbb{R}^n = \emptyset$, ill. $\partial\ \emptyset = \emptyset$.

3. Konvex halmaz

3.1. Konvex halmaz definíciója

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ nemüres halmaz. Az S halmazt akkor nevezzük konvex halmaznak, ha bármely két pontját összekötő egyenes szakasz minden pontja az S halmazhoz tartozik.

Más szavakkal megfogalmazva: Az S konvex halmaz, ha bármely $\mathbf{x}_1 \in S$ és $\mathbf{x}_2 \in S$ esetén $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in S$ minden $\lambda \in [0,1]$ számra.



Megjegyzés: Az üres halmazt ($\emptyset$) és az egy pontból álló halmazt is konvex halmaznak tekintjük.

Lemma

Legyen $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmazok. Ekkor a két konvex halmaz metszete ($\cap$), vektori összege ($\oplus$), vektori különbsége ($\ominus$) és a Descartes szorzata ($\times$) is konvex halmaz, azaz

a) $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S_1, \mathbf{x} \in S_2\}$ konvex halmaz.
b) $S_1 \oplus S_2 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \in S_1, \mathbf{x}_2 \in S_2\}$ konvex halmaz.
c) $S_1 \ominus S_2 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \in S_1, \mathbf{x}_2 \in S_2\}$ konvex halmaz.
d) $S_1 \times S_2 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in S_1, \mathbf{y} \in S_2\}$ konvex halmaz.

Lemma
Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ halmaz. Ha S konvex halmaz, akkor a belső pontjainak halmaza, azaz *int* S is konvex halmaz. Ha S konvex halmaz és *int* $S \neq \emptyset$, akkor a halmaz lezártja, azaz *cl* S is konvex halmaz.

Példa:
Igazoljuk, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásait alkotó $\mathbf{x}$ vektorok összessége konvex halmaz!
Legyen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ az egyenletrendszer két megoldása, azaz $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}$, ill. $\mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}$. Igazolni kell, hogy ekkor a $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$ is megoldás, azaz $\mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}$ minden $\lambda \in [0,1]$ számra. A mátrix-vektor műveletek tulajdonsága szerint írható, hogy $\mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) = \lambda\mathbf{Ax}_1 + (1-\lambda)\mathbf{Ax}_2 = \lambda\mathbf{b} + (1-\lambda)\mathbf{b} = \mathbf{b}$.

Példa:
Igazoljuk, hogy az $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}\}$ halmaz konvex!
A bizonyítás menete hasonló az előzőhöz. Az $\mathbf{Ax}_1 \leqq \mathbf{b}$, ill. $\mathbf{Ax}_2 \leqq \mathbf{b}$ összefüggésekből következik, hogy $\mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leqq \mathbf{b}$, ugyanis $\mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) = \lambda\mathbf{Ax}_1 + (1-\lambda)\mathbf{Ax}_2 \leqq \lambda\mathbf{b} + (1-\lambda)\mathbf{b} = \mathbf{b}$. Itt kihasználtuk a λ és $(1-\lambda)$ nemnegativitását.

Példa:
Igazoljuk, hogy az $S = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} = \mathbf{Ax},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$ halmaz konvex!
Legyen $\mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{0}$, ill. $\mathbf{x}_2 \geqq \mathbf{0}$, ekkor $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \geqq \mathbf{0}$ minden $\lambda \in [0,1]$ számra. A két S-beli pont: $\mathbf{z}_1 = \mathbf{Ax}_1$, ill. $\mathbf{z}_2 = \mathbf{Ax}_2$. Igazolni kell, hogy a $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}_1 + (1-\lambda)\mathbf{z}_2$ is S-beli pont minden $\lambda \in [0,1]$ számra, azaz $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}_1 + (1-\lambda)\mathbf{z}_2 = \lambda\mathbf{Ax}_1 + (1-\lambda)\mathbf{Ax}_2 = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) = \mathbf{Ax}$ és $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$.

Feladat:
Igazoljuk, hogy az $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \geqq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$ halmaz konvex!

3.2. Konvex burok definíciója

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz. Az S halmaz konvex burkának az S halmaz összes elemének konvex lineáris kombinációjaként adódó halmazt nevezzük. Az S halmaz konvex burkát $H(S)$-el jelöljük.

Hasonló módon definiálhatjuk egy tetszőleges halmaz lineáris burkát és affin burkát is.
Az S halmaz lineáris burkának az S halmaz összes elemének lineáris kombinációjaként adódó halmazt nevezzük.
Az S halmaz affin burka alatt pedig az S halmaz összes elemének affin kombinációjaként adódó halmazt értjük.

Az alábbiakban a burok fogalmát speciális S halmaz esetén vizsgáljuk.

Tekintsünk azt az S halmazt, amely véges sok pontból áll, azaz $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$. A véges sok pont konvex burkát politopnak nevezzük. Az S halmaz konvex burka ekkor $H(S) = H(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$.

Legyen a véges sok pont az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$. Ha az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ vektorok affin függetlenek, akkor ennek a k darab vektornak a konvex burkát (azaz a keletkező politopot) szimplex-nek nevezzük. Szimplex lehet az $\mathbb{R}^2$ térben a szakasz és a háromszög, az $\mathbb{R}^3$ térben a szakasz, a háromszög és a tetraéder.

Ha az $\mathbf{x}_i$ vektorok halmaza az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \subset \mathbb{R}^n$ n dimenziós egységvektorokból áll, akkor ezekkel a vektorokkal nyert szimplexet standard szimplexnek nevezzük. Nevezetesen standard szimplexek az $\mathbb{R}^2$ térben a $\sqrt{2}$ hosszúságú szakasz, az $\mathbb{R}^3$ térben a $\sqrt{2}$ oldalhosszúságú szabályos háromszög.

3.3. Caratheodory tétel (1907)

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz. Az S halmaz $H(S)$ konvex burkának tetszőleges $\mathbf{x}$ pontja legfeljebb $(n+1)$ darab S-beli vektor konvex lineáris kombinációjaként előállítható, azaz képletben, ha $\mathbf{x} \in H(S)$, akkor

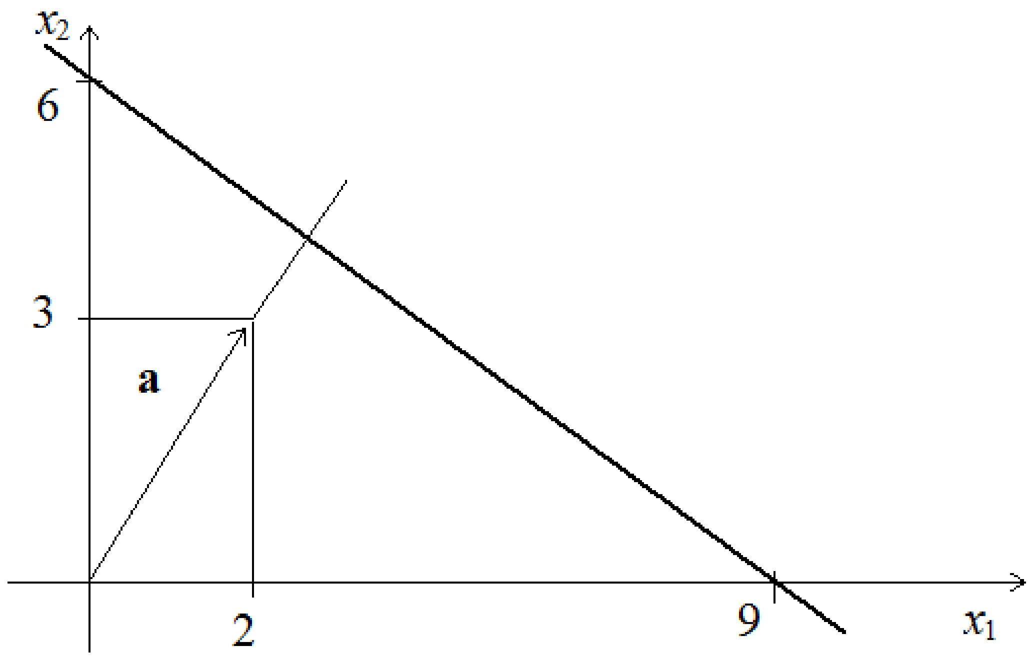
$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mathbf{x}_i \\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i &= 1 \\ \lambda_i &\geq 0, \quad i = 1, \ldots, n+1 \\ \mathbf{x}_i &\in S, \quad i = 1, \ldots, n+1. \end{aligned}$$

3.4. Hipersík, féltér, homogén féltér definíciója

A $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{px} = \alpha\}$ halmazt ($\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{p} \neq \mathbf{0}, \alpha \in \mathbb{R}$) hipersíknak nevezzük. A $\mathbf{p}$ vektort a hipersík normálvektorának nevezzük. Megjegyezzük, hogy két dimenziós térben a hipersíknak az egyenes, három dimenziós térben pedig a sík felel meg, több dimenziós térben a hipersík nem ábrázolható.

Példa:

Legyen $\mathbf{a} = (2, 3)$, $\alpha = 18$, ekkor az $\mathbf{ax} = \alpha$ hipersík a $2x_1 + 3x_2 = 18$ skalár formában írható. Az (x_1, x_2) síkban a hipersík az alábbi ábrán látható. Legegyszerűbben úgy ábrázolhatjuk, hogy meghatározzuk az x_1 $(x_2 = 0)$ és az x_2 $(x_1 = 0)$ tengelyeken a pontokat és azokon átmenő egyenes adja a hipersíkot.



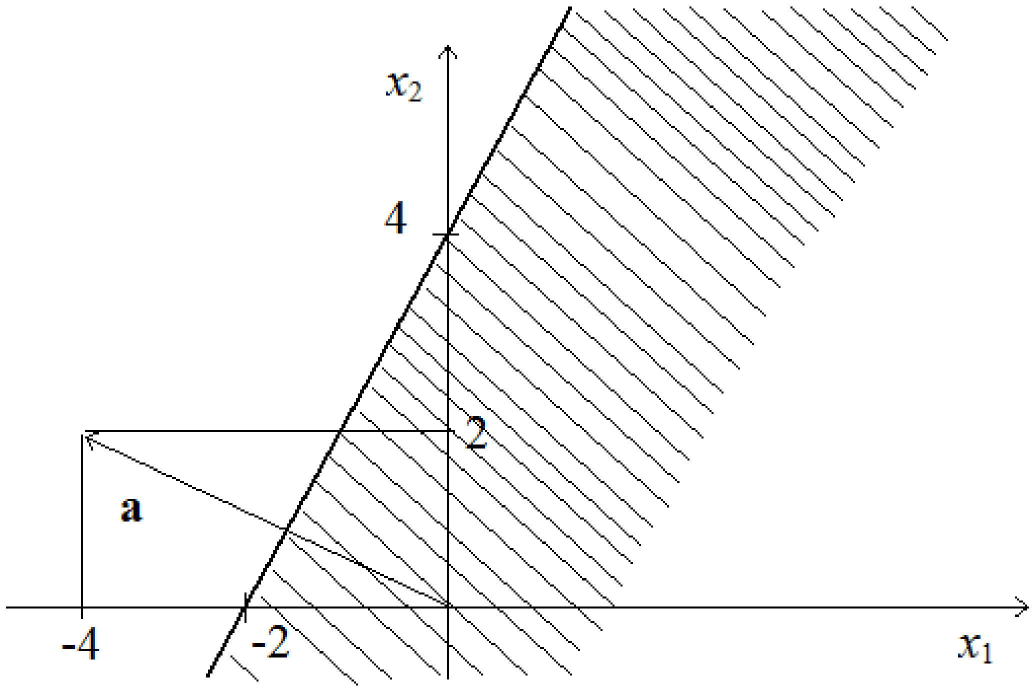
A H hipersík segítségével két zárt és két nyílt félteret definiálhatunk az alábbiak szerint:

A két zárt féltér: $H^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{px} \geqq \alpha\}$ és $H^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{px} \leqq \alpha\}$. A nyílt féltereknél az egyenlőtlenségek $>$ ill. $<$ típusúak. Homogénnek nevezzük a félteret, ha $\alpha = 0$. A homogén féltér a $\mathbf{0}$ vektort mindig tartalmazza.

Legyen H egy hipersík, amelyben adott egy $\bar{\mathbf{x}} \in H$ pont, azaz $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} = \alpha$. Ekkor ez a hipersík felírható a $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{p}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = 0\}$ alakban is. Hasonlóan írhatók fel a félterek is, $H^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{p}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \geqq 0\}$ és $H^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{p}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \leqq 0\}$.

Példa:

Legyen $\mathbf{a} = (-4, 2)$, $\alpha = 8$, ekkor az $\mathbf{ax} \leqq \alpha$ zárt féltér a $-4x_1 + 2x_2 \leqq 8$ skalár formában írható. Az (x_1, x_2) síkban a zárt féltér az alábbi ábrán látható. Legegyszerűbben úgy ábrázolhatjuk, hogy meghatározzuk az $\mathbf{ax} = \alpha$ hipersíknak x_1 $(x_2 = 0)$ és az x_2 $(x_1 = 0)$ tengelyeken lévő pontjait, ezeken átmenő egyenes adja a hipersíkot. Ez a hipersík kétfelé vágja az $\mathbb{R}^2$ teret. A féltér $\mathbf{ax} \leqq \alpha$ egyenletébe az origót $(x_1 = x_2 = 0)$ behelyettesítjük: ha teljesül az egyenlőtlenség, akkor a féltér nem más, mint a hipersík által kettévágott térnek azon része, amely az origót tartalmazza, ha nem teljesül az egyenlőtlenség, akkor a féltér nem más, mint a hipersík által kettévágott térnek azon része, amely az origót nem tartalmazza.



Megjegyzés: A hipersík és bármely típusú féltér konvex halmaz.

4. Halmaz és a halmazon kívüli pont viszonya

A következő négy tételben egy S halmaz és egy halmazon kívüli $\mathbf{y}$ pont szerepel. A tételek a halmaz és a pont viszonyát vizsgálják.

4.1. TÉTEL (mininimális távolságú pont létezése)

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ nemüres zárt halmaz és $\mathbf{y} \notin S$ pont.

Ekkor a halmaznak létezik olyan $\bar{\mathbf{x}} \in S$ pontja, amely minimális távolságra van az $\mathbf{y}$ vektortól, azaz $\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| \leqq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ minden $\mathbf{x} \in S$ vektorra.

Bizonyítás

Jelölje az $\mathbf{y}$ pont távolságát az S halmaztól $d(\mathbf{y}, S)$, amely a következőképpen írható:

$$d(\mathbf{y}, S) = \inf \{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x} \in S\} .$$

Tekintsük most az S halmaz egy $\overline{S}$ részhalmazát, amelyet a következőképpen definiálunk

$$\overline{S} = \{\mathbf{x} \in S : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leqq d(\mathbf{y}, S) + 1\} .$$

Egyszerűen látható, hogy az $\overline{S}$ halmaz korlátos és zárt (kompakt). Most tekintsük az $\overline{S}$ halmaz pontjainak távolságát az $\mathbf{y}$ vektortól, mint egy függvényt az alábbi módon:

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Az is egyszerűen látható, hogy az $f(\mathbf{x})$ függvény folytonos. Weierstrass tétel értelmében pedig egy folytonos függvény egy kompakt (zárt és korlátos) halmazon mindig felveszi a minimumát (és maximumát is). Legyen $\bar{\mathbf{x}} \in \overline{S}$ az a pont, ahol a minimumát felveszi. Ez az $\bar{\mathbf{x}}$ pont S-beli és minimális távolságra van $\mathbf{y}$ ponttól. **Q.e.d.**

Megjegyzés:
A tételben fontos hangsúlyozni a zártságot.

4.2. TÉTEL (mininimális távolságú pont egyértelmű létezése)

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ nemüres zárt konvex halmaz és $\mathbf{y} \notin S$.

Ekkor egy és csak egy olyan $\bar{\mathbf{x}} \in S$ létezik, amely minimális távolságra van az $\mathbf{y}$ vektortól.

Bizonyítás

Az előző tétel szerint létezik olyan $\bar{\mathbf{x}} \in S$ vektor, amely minimális távolságra van az $\mathbf{y}$ vektortól.

Indirekte tegyük fel, hogy két ilyen pont $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ is létezik, legyen d a közös távolság, azaz

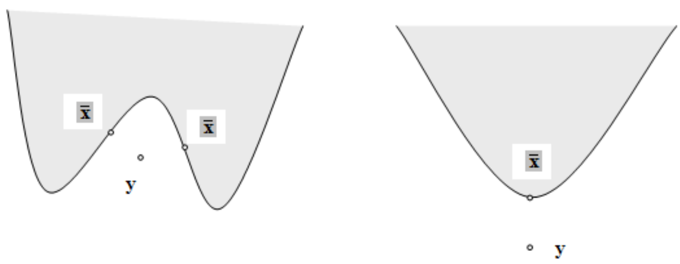
$$\begin{aligned} d &= \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}\| \text{ és} \\ d &< \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \text{minden } \mathbf{x} \in S \setminus \{\mathbf{x}_1\} \setminus \{\mathbf{x}_2\} \text{ vektorra.} \end{aligned}$$

Mivel a halmaz konvex, így benne bármely szakasz is halmazbeli. Emiatt mondhatjuk, hogy ha minden $\mathbf{x} \in S \setminus \{\mathbf{x}_1\} \setminus \{\mathbf{x}_2\}$ vektorra igaz a fenti egyenlőtlenség, akkor igaz az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ vektorokat összekötő szakasz minden $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$, $\lambda \in (0,1)$ belső pontjára is, így

$$\begin{gathered} d < \|\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}\| = \\ = \|\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 - \lambda\mathbf{y} - (1-\lambda)\mathbf{y}\| = \\ = \|\lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}) + (1-\lambda)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{y})\| \leqq \\ \leqq \lambda \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}\| + (1-\lambda) \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}\| = \lambda d + (1-\lambda) d = d \end{gathered}$$

Ellentmondásra $(d < d)$ jutottunk, tehát csak egyetlen legkisebb távolságú pont létezik, ha a halmaz konvex. **Q.e.d.**

Az alábbi ábra egy nemkonvex és egy konvex halmaz esetén szemlélteti a fenti két tételt.



A halmaz konvex tulajdonsága biztosítja, hogy egyetlen minimális távolságú pont létezik.

4.3. TÉTEL (tompaszög tétel)

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ nemüres zárt konvex halmaz és $\mathbf{y} \notin S$. Legyen $\bar{\mathbf{x}} \in S$ olyan, amely minimális távolságra van az $\mathbf{y}$ vektortól.

Ekkor $(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \leqq 0$ minden $\mathbf{x} \in S$ vektorra, azaz az $\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}$ és az $\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ vektorok által bezárt szög tompaszög vagy derékszög.

Bizonyítás

Az előző két tétel szerint létezik $\bar{\mathbf{x}} \in S$ minimális távolságú vektor (most nem különösebben érdekes az egyértelműség, csak a létezés). Ekkor írható, hogy

$$\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| \leqq \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \quad \text{minden } \mathbf{z} \in S \text{ vektorra.}$$

Legyen $\mathbf{z} = \mathbf{x} \in S$ egy tetszőleges, de rögzített pont. Mivel a S halmaz konvex, így az $\mathbf{x}$ és az $\bar{\mathbf{x}}$ pontokat összekötő egyenes szakasz minden pontja is benne van a halmazban, tehát a szakasz tetszőleges pontjára is igaz a fenti egyenlőtlenség. Az egyenlőtlenség igaz akkor is, ha mindkét oldalt négyzetre emeljük, azaz

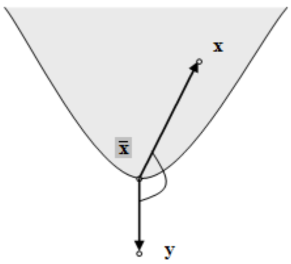
$$\begin{aligned}\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|^2 &\leqq \|\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|^2 = \\ &= \|\lambda(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{y})\|^2 \leqq \lambda^2 \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 + 2\lambda(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) + \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|^2,\end{aligned}$$

amelyet egyszerűsítve

$$\lambda^2 \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 + 2\lambda(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \geqq 0$$

egyenlőtlenség adódik. A baloldali, λ-ra nézve másodfokú összefüggés csak akkor teljesülhet minden $\lambda \in (0,1)$ esetén, ha $(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})(\bar{\mathbf{x}}-\mathbf{y}) \geqq 0$, amelyből következik, hogy $(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}) \leqq 0$.
Q.e.d.

Az alábbi ábra szemlélteti a tompaszög tételt.



A következőkben szeparáló hipersíkokra és támasztó hipersíkokra vonatkozó tételeket ismertetünk. Ezek a tételek alapvető fontosságúak lesznek az optimalizálásban használatos szükséges feltételek kidolgozásában. Először a legfontosabb tételt, egy pont és egy konvex halmaz szeparációját közöljük, valójában ez az alapja a többi tételnek.

4.4. TÉTEL (pont és konvex halmaz szeparációja)

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ nemüres zárt konvex halmaz és $\mathbf{y} \notin S$.

Ekkor létezik olyan $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{p} \neq 0$ vektor és $\alpha \in \mathbb{R}$ skalár szám, hogy

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{py} & > & \alpha & \text{és} \\ \mathbf{px} & \leqq & \alpha & \text{minden } \mathbf{x} \in S \text{ vektorra.} \end{array}$$

A tétel azt fejezi ki, hogy létezik egy $\mathbf{px} = \alpha$ hipersík ($\mathbf{p}$ a hipersíkra merőleges vektor), amely szeparálja (elválasztja) a pontot és a halmazt, azaz a hipersík által meghatározott félterek közül az egyik féltérben van az $\mathbf{y}$ pont, a másik féltérben pedig a S halmaz minden eleme.

Bizonyítás
Az előző tételben bebizonyítottuk, hogy érvényes a tompaszög tétel, azaz $(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \leqq 0$ minden $\mathbf{x} \in S$ vektorra. Legyen $\mathbf{p} = \mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}$ és legyen $\alpha = \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}$. Mivel $\bar{\mathbf{x}} \in S$ és $\mathbf{y} \notin S$, így $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$. A tompaszög tétel ekkor így írható: $\mathbf{px} \leqq \alpha$ minden $\mathbf{x} \in S$ vektorra. Tehát a tételbeli második összefüggés igaz. Az első összefüggés igazolása is egyszerű, hiszen $\mathbf{py} = \mathbf{p}(\mathbf{p} + \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{p}^2 + \alpha > \alpha$, mivel $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ ($\mathbf{p}^2 > 0$). **Q.e.d.**

5. Farkas tétel és Gordan tétel

5.1. Farkas tétel (1902)

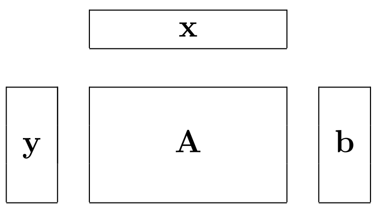
A Farkas tételt szokás Farkas lemmaként is emlegetni. Ez a tétel nagyon fontos szerepet játszik az optimalizálásban, a lineáris és nemlineáris programozás optimalitási feltételeinek meghatározásában.

Legyen adott egy $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix és egy m elemű $\mathbf{b}$ vektor. Tekintsük az alábbi két rendszert.

$$\boxed{\begin{array}{cc} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \mathbf{yA} \leqq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} & \mathbf{yb} > 0 \end{array}}$$

Ekkor az alábbi két rendszer közül egyiknek és csak egyiknek van megoldása.

Az adatainkat a könnyebb áttekinthetőség kedvéért célszerű az alábbi sémába foglalni. Ezt a sémát érdemes alkalmazni amiatt is, hogy szemléletesebben látjuk a tételben szereplő mennyiségek méretét is.



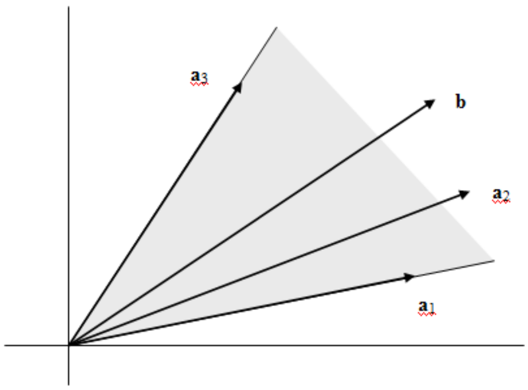
Bizonyítás
i) Először tegyük fel, hogy a baloldali rendszernek van megoldása, azaz létezik olyan $\mathbf{x}$, hogy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$. Indirekte tegyük fel, hogy a jobboldali rendszernek is van megoldása, létezik $\mathbf{y}$. Ekkor $\mathbf{yb} = \mathbf{y}(\mathbf{Ax}) = (\mathbf{yA})\mathbf{x} \leqq 0$, ami ellentmond annak, hogy $\mathbf{yb} > 0$. Itt felhasználtuk, hogy egy nempozitív vektor és egy nemnegatív vektor skaláris szorzata nempozitív. Tehát, ha a baloldali rendszernek van megoldása, akkor a jobboldali rendszernek nincs.

ii) Most tegyük fel, hogy a baloldali rendszernek nincs megoldása. Konstruáljuk meg az alábbi S halmazt a következőképpen:

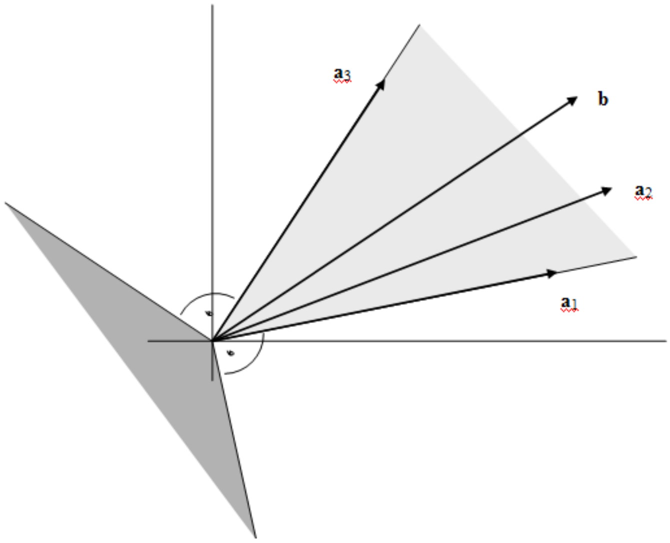
$$S = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$$

Látható, hogy az S nemüres zárt konvex halmaz és mivel a feltevésünk szerint a baloldali rendszernek nincs megoldása, így $\mathbf{b} \notin S$. Ekkor az előző tétel (pont és konvex halmaz szeparációja) szerint létezik egy $\mathbf{y}$ ($\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$) vektor és α skalár úgy, hogy $\mathbf{yb} > \alpha$ és $\mathbf{yz} \leqq \alpha$ minden $\mathbf{z} \in S$ vektorra. Mivel $\mathbf{0} \in S$, így $\alpha \geqq 0$, amiből azonnal látható, hogy $\mathbf{yb} > 0$. Továbbá $\mathbf{z} = \mathbf{Ax},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, ebből pedig adódik, hogy $\mathbf{y}(\mathbf{Ax}) = (\mathbf{yA})\mathbf{x} \leqq \alpha$ minden $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ vektorra. A $\sum(\mathbf{yA})_i x_i$ skaláris szorzat akkor és csak akkor lehet kisebb vagy egyenlő egy nemnegatív α számnál minden $x_i \geqq 0$ esetén, ha minden $(\mathbf{yA})_i \leqq 0$. Indirekte tegyük fel, hogy valamely k indexre $(\mathbf{yA})_k > 0$, a többi $(\mathbf{yA})_i = 0$. Ekkor a skaláris szorzat $(\mathbf{yA})\mathbf{x} =(\mathbf{yA})_k x_k$. Akármilyen kicsi pozitív szám is az $(\mathbf{yA})_k$ mennyiség, mindig megadható egy olyan nagy pozitív x_k, hogy $\sum(\mathbf{yA})_i x_i > 0$, sőt olyan nagy pozitív x_k is megadható, hogy $\sum(\mathbf{yA})_i x_i > \alpha$. Ez pedig ellentmond azzal, hogy $(\mathbf{yA})\mathbf{x} \leqq \alpha$ teljesüljön. Összefoglalva tehát ha a baloldali rendszernek nincs megoldása, akkor a jobboldali rendszernek van megoldása, azaz létezik olyan $\mathbf{y}$ vektor, hogy $\mathbf{yA} \leqq \mathbf{0}, \mathbf{yb} > 0$. **Q.e.d.**

Az alábbiakban megadjuk a Farkas tétel geometriai interpretációját. A következő ábrán látható három vektor a $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorait mutatja. A balodali rendszer, azaz az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ megoldása azt jelenti, hogy a $\mathbf{b}$ vektor előállítható az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vektorok nemnegatív kombinációjával. Ez pedig geometriailag azt jelenti, hogy a $\mathbf{b}$ vektornak benne kell lennie az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vektorok által meghatározott szögtartományban (kúpban). Ezt mutatja az alábbi ábra.



A jobboldali rendszer $\mathbf{yA} \leqq \mathbf{0}$ egyenlőtlensége azt jelenti, hogy az $\mathbf{y}$ vektor merőleges vagy tompaszöget zár be az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vektorok mindegyikével. Tehát az $\mathbf{y}$ vektornak az alábbi ábrán látható sötétebb árnyékolású kúpban kell lennie. A jobboldali rendszer akkor oldható meg, ha az $\mathbf{y}$ vektor a $\mathbf{b}$ vektorral hegyes szöget zár be. Tehát az ábrákban szereplő $\mathbf{b}$ vektor helyzete esetén a baloldali rendszernek van megoldása, a jobboldali rendszernek pedig nem lehet megoldása. Ha a $\mathbf{b}$ vektor nincs a világosabb kúpban, akkor a baloldali rendszernek nem lehet megoldása, a jobboldali rendszernek pedig van megoldása, mivel ekkor a sötétebb kúpban lévő $\mathbf{y}$ vektorok között van olyan, amely a $\mathbf{b}$ vektorral hegyes szöget zár be.



Feladat:
Az olvasó vizsgálja meg a Farkas tételt különböző helyzetű oszlopvektorok esetén.

5.2. Farkas tétellel ekvivalens tételek

Az alábbiakban a fenti standard alakú Farkas tétellel ekvivalens tételeket ismertetünk. Mindegyik tétel azt fejezi ki, hogy a megadott két rendszer közül egyiknek és csak egyiknek van megoldása. A tételeknek ezt a szöveges állítását nem írjuk le, csak a két alternatív rendszert közöljük.

TÉTEL 1

$\mathbf{Ax} \geqq \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$	$\mathbf{yA} \leqq \mathbf{0}$ $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ $\mathbf{yb} > 0$

Bizonyítás
Egy új, nemnegatív változó bevezetésével a baloldali rendszert a standard Farkas tétel baloldali formájára hozzuk. Bevezetve egy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ nemnegatív változót az $\mathbf{Ax} \geqq \mathbf{b}$ baloldali rendszer az $\mathbf{Ax} - \mathbf{v} = \mathbf{b}$, illetve a megfelelő méretű $\mathbf{E}$ egységmátrixot használva az $\mathbf{Ax} + (-\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{b}$ alakba írható. Ennek a sémája pedig a következő:

	$\mathbf{x}$	$\mathbf{v}$	
$\mathbf{y}$	$\mathbf{A}$	$-\mathbf{E}$	$\mathbf{b}$

A standard Farkas tétel alapján már egyszerűen felírható a másik rendszer, azaz

$\mathbf{Ax} - \mathbf{Ev} = \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geqq \mathbf{0}$	$\mathbf{yA} \leqq \mathbf{0}$ $-\mathbf{yE} \leqq \mathbf{0}$ $\mathbf{yb} > 0$

Ebből pedig egy apró átrendezéssel kapjuk a jobboldali rendszer tételben szereplő alakját.
Q.e.d.

TÉTEL 2

$$\boxed{\begin{array}{ll} \begin{array}{c} \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \end{array} & \qquad \begin{array}{c} \mathbf{yA} \leqq 0 \\ \mathbf{y} \leqq 0 \\ \mathbf{yb} > 0 \end{array} \end{array}}$$

TÉTEL 3

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} & \qquad \begin{array}{c} \mathbf{yA} = \mathbf{0} \\ \mathbf{yb} \neq 0 \;\; (\mathbf{yb} > 0) \end{array} \end{array}}$$

Bizonyítás

Itt a baloldali rendszer abban különbözik a standard Farkas tétel baloldali formájától, hogy az $\mathbf{x}$ vektor tetszőleges lehet. Itt is új nemnegatív változó bevezetésével hozzuk standard alakra a baloldali rendszert, mégpedig két vektort vezetünk be, nevezetesen az $\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^- \geqq \mathbf{0}$ vektorokat úgy, hogy $\mathbf{x} = \mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-$. Ekkor az $\mathbf{A}(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) = \mathbf{Ax}^+ + (-\mathbf{A})\mathbf{x}^- = \mathbf{b}, \mathbf{x}^+, \mathbf{x}^- \geqq \mathbf{0}$ baloldali rendszert kapjuk. Ennek a sémája pedig a következő:

$$\begin{array}{c c|c|c c} & & \mathbf{x}^+ & \mathbf{x}^- & \\ \hline \mathbf{y} & & \mathbf{A} & -\mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}$$

A standard Farkas tétel alapján már egyszerűen felírható a másik rendszer, azaz

$$\boxed{\begin{array}{ll} \begin{array}{c} \mathbf{Ax}^+ + (-\mathbf{A})\mathbf{x}^- = \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^+, \mathbf{x}^- \geqq \mathbf{0} \end{array} & \qquad \begin{array}{c} \mathbf{yA} \leqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}(-\mathbf{A}) \leqq \mathbf{0} \\ \mathbf{yb} > 0 \end{array} \end{array}}$$

Az első két összefüggésből azt kapjuk, hogy $\mathbf{yA} = \mathbf{0}$. Ha $\mathbf{yA} = \mathbf{0}$ megoldható, akkor a $-\mathbf{y}$ is megoldás, ekkor viszont előjele tetszőleges, így az $\mathbf{yb} > 0$ előírás helyett írhatjuk, hogy $\mathbf{yb} \neq 0$.

TÉTEL 4

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b} & \qquad \begin{array}{c} \mathbf{yA} = \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{yb} < 0 \end{array} \end{array}}$$

TÉTEL 5

$$\boxed{\begin{array}{ll} \begin{array}{c} \mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \end{array} & \qquad \begin{array}{c} \mathbf{yA} \leqq \mathbf{0} \\ \mathbf{yB} = \mathbf{0} \\ \mathbf{yb} > 0 \end{array} \end{array}}$$

TÉTEL 6

$$\boxed{\begin{array}{cc} \mathbf{Ax} \geqq \mathbf{b} & \mathbf{yA} + \mathbf{zB} \leqq \mathbf{0} \\ \mathbf{Bx} = \mathbf{c} & \mathbf{y} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} & \mathbf{yb} + \mathbf{zc} > 0 \end{array}}$$

Feladat:
Bizonyítsa be a nem bizonyított tételeket. Az első és a harmadik tétel bizonyításában megadtuk az alapötletet arra, hogyan kell a baloldali rendszert a standard Farkas tétel baloldali formájára hozni. Ezután már egyszerűen felírható a másik rendszer. Célszerű a fentebb bemutatott sémát használni.

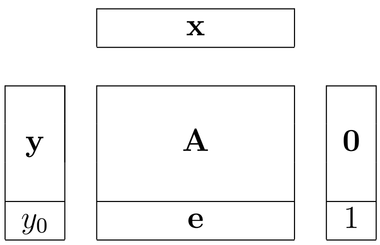
5.3. Gordan tétel (1873)

Legyen adott egy $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix. Tekintsük az alábbi két rendszert.

$$\boxed{\begin{array}{cc} \mathbf{Ax} = \mathbf{0} & \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} & \mathbf{yA} < \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0} & \end{array}}$$

Ekkor az alábbi két rendszer közül egyiknek és csak egyiknek van megoldása.

Bizonyítás
A bizonyításhoz a Farkas tételt használjuk fel, így felfogható a Farkas tétel egyik következményének is. A jobboldali $\mathbf{yA} < \mathbf{0}$ rendszer ekvivalens az $\mathbf{yA} + \mathbf{e}y_0\mathbf{e} \leqq \mathbf{0}$ rendszerrel, ahol $y_0 > 0$ és $\mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1)$ az úgynevezett összegező vektor. Eszerint a jobboldali rendszer a partícionálás segítségével az alábbiak szerint is írható $[\mathbf{y}, y_0] \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \leqq \mathbf{0}$ és $(\mathbf{y}, y_0) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} > 0$. Az alábbi sémában adhatjuk meg a rendszert.



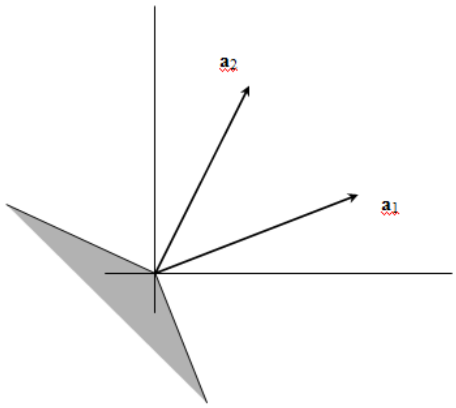
Ez a rendszer pedig a standard Farkas tétel jobboldali rendszerével ekvivalens, így a Farkas tétel szerint az ehhez tartozó másik rendszer a következőképpen írható: $\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$. Ezt pedig kifejtve kapjuk, hogy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}, \mathbf{ex} = 1, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$. Mivel $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, így az $\mathbf{ex} = 1$ összefüggés helyettesíthető azzal, hogy az $\mathbf{x}$ vektor nem lehet zérus vektor. **Q.e.d.**

Az alábbiakban megadjuk a Gordan tétel geometriai interpretációját. A következő ábrán látható két vektor a $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorait mutatja.

Az ábrán látható esetben a balodali rendszer, azaz az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ nem oldható meg, mivel az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ vektorok lineárisan függetlenek, így a zérus vektort csak az

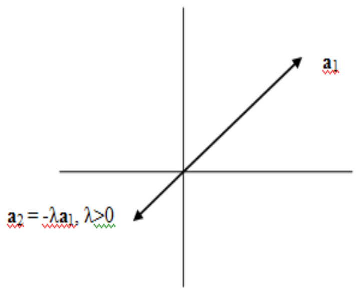
$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lineáris kombinációval állíthatják elő, a rendszer megoldásához pedig szükséges, hogy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

A jobboldali rendszer, azaz $\mathbf{yA} < \mathbf{0}$ akkor oldható meg, ha az $\mathbf{y}$ vektor tompaszöget zár be az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ vektorok mindegyikével. Tehát az $\mathbf{y}$ vektornak az alábbi ábrán látható árnyékolt kúpban kell lennie. Mivel ez nem üres, így létezik megoldása a jobboldali rendszernek.



Az alábbi ábra olyan helyzetet mutat, amelyben a jobboldali rendszernek nincs megoldása, nincs ugyanis olyan tartomány, amelynek $\mathbf{y}$ vektorai az $\mathbf{a}_1$ és az $\mathbf{a}_2$ vektorral is tompaszöget zárnak be.

A baloldali rendszernek viszont van megoldása, mivel $\mathbf{a}_2 = -\lambda \mathbf{a}_1$, ahol $\lambda > 0$. Ebből pedig $\lambda \mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ következik, tehát az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ teljesül és az oszlopvektorok együtthatói nemnegatívok és nem mindegyik zérus.



Feladat:
Vizsgálja meg a Gordan tételt különböző helyzetű oszlopvektorok esetén!

A Gordan tételt, hasonlóan a Farkas tételhez gyakran használjuk a nemlineáris programozás optimalitási feltételeinek kidolgozásában. Megjegyezzük, hogy a tételt a halmazok szeparációs tétele segítségével is bizonyíthatjuk. Hasonló bizonyítást fogunk látni a szeparációs tétel egyik következményénél, így ezt a bizonyítási módot az olvasóra bízzuk.

6. Szeparációs tételek

6.1. Halmaz támaszsíkjának definíciója

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ nemüres halmaz és legyen $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ az S egy határpontja, azaz $\bar{\mathbf{x}} \in \partial S$. A $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{p}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = 0\}$ hipersíkot az S halmaz az $\bar{\mathbf{x}}$ határpontbeli támaszsíkjának nevezzük, ha $S \subseteq H^+$ vagy $S \subseteq H^-$, azaz vagy a $\mathbf{p}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \geqq 0$ vagy a $\mathbf{p}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \leqq 0$ igaz minden $\mathbf{x} \in S$ esetén.

6.2. Támaszsíkra vonatkozó tételek

TÉTEL

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ nemüres konvex halmaz és legyen $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ az S egy határpontja, azaz $\bar{\mathbf{x}} \in \partial S$. Ekkor létezik egy olyan hipersík, amely az S halmaz $\bar{\mathbf{x}}$ határpontbeli támaszsíkja, azaz létezik $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ vektor úgy, hogy $\mathbf{p}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \leqq 0$ az S halmaz lezártjának minden $\mathbf{x}$ pontjára, azaz minden $\mathbf{x} \in clS$-re.

TÉTEL

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ nemüres konvex halmaz és legyen $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ az S egy nem belső pontja, azaz $\bar{\mathbf{x}} \notin intS$. Ekkor létezik $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ vektor úgy, hogy $\mathbf{p}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \leqq 0$ az S halmaz lezártjának minden $\mathbf{x}$ pontjára, azaz minden $\mathbf{x} \in clS$-re.

Bizonyítás

Ha $\bar{\mathbf{x}} \in clS$, akkor a pont és konvex halmaz szeparációjának tétele alapján igaz a tétel. Ha pedig $\bar{\mathbf{x}} \in \partial S$, akkor az előző tétel alapján igaz a tétel. **Q.e.d.**

6.3. Két halmaz szeparációjának definíciója

Legyen $S_1 \subset \mathbb{R}^n$, $S_2 \subset \mathbb{R}^n$ nemüres halmazok. A $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{px} = \alpha\}$ hipersíkot az S_1 és S_2 halmazok szeparáló hipersíkjának nevezzük, ha $\mathbf{px} \leqq \alpha$ minden $\mathbf{x} \in S_1$ és $\mathbf{px} \geqq \alpha$ minden $\mathbf{x} \in S_2$ esetén.

6.4. TÉTEL (két konvex halmaz szeparációja)

Legyen S_1, $S_2 \subset \mathbb{R}^n$ nemüres konvex halmazok és tegyük fel, hogy nincs közös pontjuk, azaz $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Ekkor létezik egy olyan hipersík, amely elválasztja az S_1 és S_2 halmazokat, azaz létezik olyan $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ vektor, hogy

$$\mathbf{px}_1 \leqq \mathbf{px}_2 \qquad \text{minden } \mathbf{x}_1 \in S_1 \text{ és } \mathbf{x}_2 \in S_2 \text{ esetén.}$$

Továbbá, amennyiben valamelyik halmaz pl. az S_1 olyan, hogy $int\ S_1 \neq \emptyset$ és $int\ S_1 \cap S_2 = \emptyset$, akkor az is igaz, hogy

$$\mathbf{px}_1 \leqq \mathbf{px}_2 \qquad \text{minden } \mathbf{x}_1 \in cl\ S_1 \text{ és } \mathbf{x}_2 \in S_2 \text{ esetén.}$$

Bizonyítás

Legyen $S = S_1 \ominus S_2 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \in S_1, \mathbf{x}_2 \in S_2\}$. Mivel két halmaz vektori különbsége konvex, így S konvex halmaz. Az S_1, S_2 halmazoknak nincs közös pontjuk, így $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \notin S$. Alkalmazhatjuk a támaszsíkra vonatkozó tételt, miszerint létezik olyan $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ vektor, hogy

$$\mathbf{px} \leqq 0 \quad \text{minden } \mathbf{x} \in S \text{ esetén,}$$

amely az S definíciója szerint $\mathbf{px} = \mathbf{p}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \leqq 0$, azaz $\mathbf{px}_1 \leqq \mathbf{px}_2$ minden $\mathbf{x}_1 \in S_1$ és $\mathbf{x}_2 \in S_2$ esetén. **Q.e.d.**

6.5. TÉTEL (szeparációs tétel egy következménye)

Ezt a tételt is, mint a Gordan tételt, gyakran használjuk a nemlineáris programozás optimalitási feltételeinek kidolgozásában.

Legyen adott egy $m \times n$-es $\mathbf{A}_1$ és egy $m \times k$-s $\mathbf{A}_2$ olyan mátrix, amelynek oszlopvektorai lineárisan függetlenek. Ekkor az alábbi két rendszer közül pontosan egyiknek van megoldása:

$\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ $\mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{0}$ $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \neq \mathbf{0}$	$\mathbf{y}\mathbf{A}_1 < \mathbf{0}$ $\mathbf{y}\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$

Bizonyítás

i) Először tegyük fel, hogy a jobboldali rendszernek van megoldása, azaz létezik olyan $\mathbf{y}$ vektor, hogy $\mathbf{y}\mathbf{A}_1 < \mathbf{0}$ és $\mathbf{y}\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$. Indirekte tegyük fel, hogy a baloldali rendszernek is van megoldása, azaz létezik olyan $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \neq \mathbf{0}$ partícionált vektor, hogy $\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{0}$. Több esetet vizsgálunk:

a) $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ esetén egyrészt $\mathbf{y}(\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1) = 0$, másrészt $(\mathbf{y}\mathbf{A}_1)\mathbf{x}_1 < 0$, ami ellentmondás.

b) $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ esetén $\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$, ami ellentmond annak, hogy az $\mathbf{A}_2$ mátrix oszlopvektorai lineárisan függetlenek.

c) $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ esetén egyrészt $\mathbf{y}(\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1) + \mathbf{y}(\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2) = 0$, másrészt $(\mathbf{y}\mathbf{A}_1)\mathbf{x}_1 + (\mathbf{y}\mathbf{A}_2)\mathbf{x}_2 < 0$, ami ellentmondás. Tehát, ha a jobboldali rendszernek van megoldása, akkor a baloldali rendszernek nincs.

ii) Most tegyük fel, hogy a jobboldali rendszernek nincs megoldása. Konstruáljuk meg az alábbi halmazokat a következőképpen:

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{\mathbf{w}_1 \in \mathbb{R}^{n+k} : \mathbf{w}_1 = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2), \mathbf{z}_1 < \mathbf{0},\ \mathbf{z}_2 = \mathbf{0}, \mathbf{z}_1 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^k\right\}, \\ S_2 &= \left\{\mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^{n+k} : \mathbf{w}_2 = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2), \mathbf{z}_1 = \mathbf{y}\mathbf{A}_1,\ \mathbf{z}_2 = \mathbf{y}\mathbf{A}_2, \mathbf{z}_1 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^k, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\right\}. \end{aligned}$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az S_1 és S_2 halmazok nemüres konvex halmazok ($int\ S_1$ sem üres) és mivel feltevésünk szerint a jobboldali rendszernek nincs megoldása így diszjunktak is ($int\ S$ és S_2 is diszjunk). A konvex halmazokra vonatkozó szeparációs tétel szerint létezik olyan $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n+k}, \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ vektor, hogy

$$\mathbf{p}\mathbf{w}_1 \leqq \mathbf{p}\mathbf{w}_2 \quad \text{minden } \mathbf{w}_1 \in cl\ S_1 \text{ és } \mathbf{w}_2 \in S_2 \text{ esetén.}$$

Partícionáljuk a $\mathbf{p}$ vektort a $\mathbf{w}$ vektorok mintájára és legyen $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Ekkor a fenti a következőképpen írható

$$\mathbf{z}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{z}_2\mathbf{x}_2 \leqq \mathbf{y}\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 \quad \text{minden } (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \in cl\ S_1 \text{ és } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \text{ esetén.}$$

A $\mathbf{z}_2 = \mathbf{0}$, így a baloldal $\mathbf{z}_1\mathbf{x}_1$. Mivel $\mathbf{z}_1 < \mathbf{0}$, ebből következik, hogy a fenti egyenlőtlenség csak akkor állhat fenn, ha $\mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{0}$. Ellenkező esetben a baloldal olyan nagy pozitív szám is lehetne, amelyre nem állhatna fenn az egyenlőtlenség tetszőleges $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ esetén. A $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \in cl\ S_2$ esetén is igaz a szeparációs tétel, ekkor a $\mathbf{z}_1 = \mathbf{0}$ választással azt kapjuk, hogy $\mathbf{y}(\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2) \geqq 0$ minden $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ vektorra. Legyen $\mathbf{y} = -(\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2)$, ekkor $-(\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2)^2 \geqq 0$, ebből pedig következik, hogy $\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Összefoglalva tehát ha a jobboldali rendszernek nincs megoldása, akkor a baloldali rendszernek van megoldása, azaz létezik olyan $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \neq \mathbf{0}$ vektor, hogy $\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{0}$. **Q.e.d.**

6.6. Konvex kónusz és poláris fogalma

Konvex kónusz

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ nemüres halmaz. A S halmazt zérus csúcsú kónusznak (vagy kúpnak) nevezzük, ha bármely $\mathbf{x} \in S$ esetén $\lambda\mathbf{x} \in S$ minden $\lambda > 0$ számra. Ha S konvex halmaz, akkor a S halmazt konvex kónusznak nevezzük.

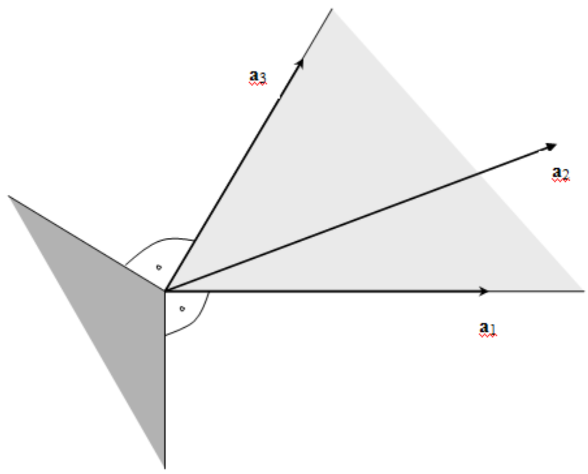
Poláris kónusz

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ nemüres halmaz. Az S halmaz poláris kónuszának nevezzük (S^*-al jelöljük) azon vektorok összességét, amelyek derékszöget vagy tompaszöget zárnak be az S halmaz minden vektorával, azaz

$$S^* = \{\mathbf{y} : \mathbf{yx} \leqq 0, \mathbf{x} \in S\}.$$

Ha az S halmaz üres, akkor legyen $S^* = \mathbb{R}^n$.

Az alábbi ábrán a halványabb árnyékolású konvex kónusz poláris kónusza a sötétebb árnyalatú kónusz.



6.7. Farkas tétel más formában

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ nemüres zárt konvex kónusz. A S konvex kónusz polárisának polárisa maga a S konvex kónusz, azaz $S^{**} = S$.

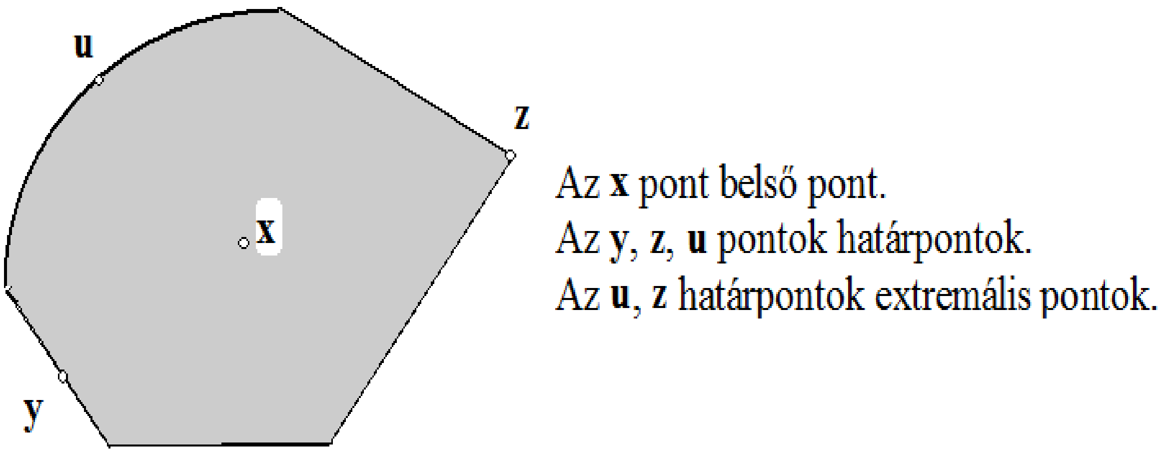
7. Extremális pont, extremális irány, konvex poliéder

7.1. Extremális pont definíciója

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ nemüres zárt konvex halmaz. Az $\bar{\mathbf{x}} \in S$ pont az S konvex halmaz extremális pontja, ha az S-nek nincs olyan két különböző pontja, hogy az $\bar{\mathbf{x}}$ pont a két pontot összekötő szakasz belső pontja legyen, azaz nem léteznek olyan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ pontok, hogy $\bar{\mathbf{x}} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$ valamely $\lambda \in (0, 1)$ számra.

Más megfogalmazásban: Az $\bar{\mathbf{x}} \in S$ pont az S konvex halmaz extremális pontja, ha az $\bar{\mathbf{x}} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$ ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ és $0 < \lambda < 1$) feltételezésből következik, hogy $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Az alábbi ábra a konvex halmaz különböző pontjait, többek között az extremális pontjait is szemlélteti.



Megjegyzés: Nyílt halmaznak nincs extremális pontja.

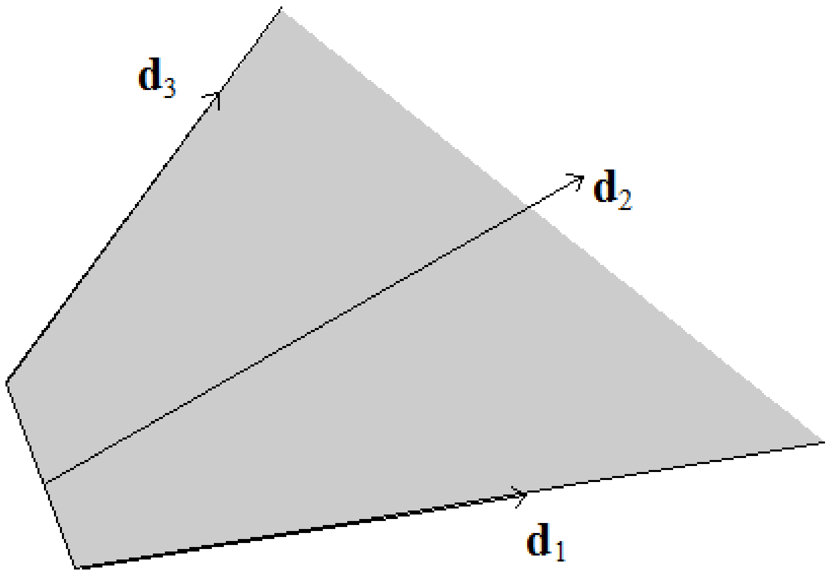
7.2. Extremális irány definíciója

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ nemüres zárt konvex halmaz. Először a konvex halmazban az irány fogalmát adjuk meg. Az S konvex halmazban egy nemzérus $\mathbf{d}$ vektort iránynak (vagy irányvektornak) nevezünk, ha bármely $\mathbf{x} \in S$ ponthoz tartozó $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}$ pont is az S konvex halmaz eleme minden $\lambda > 0$ esetén. Az S konvex halmaz $\mathbf{d}_1$ és $\mathbf{d}_2$ irányvektorát nem egyirányba mutató irányvektoroknak nevezzük, ha $\mathbf{d}_1 \neq \alpha\mathbf{d}_2$ valamely $\alpha > 0$-ra.

Az S konvex halmaz egy $\mathbf{d}$ irányvektorát extremális iránynak nevezzük, ha S-nek nincs olyan két, nem egyirányba mutató irányvektora, hogy a $\mathbf{d}$ irány a két irány által meghatározott kónusz (szögtartomány) belsejében legyen, azaz nem léteznek olyan $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_1 \neq \alpha\mathbf{d}_2$ irányok, hogy $\mathbf{d} = \lambda_1\mathbf{d}_1 + \lambda_2\mathbf{d}_2$ valamely $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ számokra.

Más megfogalmazásban: Az S konvex halmaz egy $\mathbf{d}$ irányvektora extremális irány, ha a $\mathbf{d} = \lambda_1\mathbf{d}_1 + \lambda_2\mathbf{d}_2$ $(\lambda_1, \lambda_2 > 0)$ feltételezésből következik, hogy $\mathbf{d}_1 = \alpha\mathbf{d}_2$ valamely $\alpha > 0$-ra.

Az alábbi ábra a konvex halmaz extremális irányát szemlélteti. A $\mathbf{d}_2$ vektor a halmaz egy tetszőleges iránya, a $\mathbf{d}_1$ és a $\mathbf{d}_3$ vektorok a halmaz extremális irányai.



Megjegyzés: Korlátos halmaznak nincs iránya, így extremális iránya sincs.

7.3. Konvex poliéder

Véges sok zárt féltér metszetét konvex poliédernek nevezzük, képletben

$$S = \{\mathbf{x} : \mathbf{p}_i\mathbf{x} \leqq \alpha_i, i = 1, \ldots, m\}$$

A konvex poliédert szokás poliedrikus halmaznak is nevezni. A poliéder szó sok lapot jelent, itt azt jelenti, hogy a poliéder hipersíkokkal határolt. A konvex jelző pedig a halmaz másik tulajdonságára utal, amelyről egyszerűen meggyőződhetünk, hisz a félterek konvexek, konvex halmazok metszete pedig konvex.

A konvex poliéder egy speciális konvex halmaz és ennek az extremális pontjait csúcspontoknak vagy röviden csúcsoknak is szokás nevezni. Az ábrázolható tartományokban meggyőződhetünk arról, hogy az extremális pontok valóban csúcspontok.

Mivel egy egyenletet két egyenlőtlenséggel leírhatunk, így a konvex poliéder véges számú egyenlőtlenséggel és/vagy egyenlettel reprezentálható.

Néhány tipikus példa a konvex poliéderekre:

1. $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$
2. $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$
3. $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}_1\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}_1,\ \mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2,\ \mathbf{A}_3\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}_3,\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$

Az $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ egyenlőtlenség, vagyis az $x_j \geqq 0, (j = 1, \ldots, n)$ egyenlőtlenségek egy-egy speciális homogén féltérnek felelnek meg, mégpedig olyanoknak, amelyeknek a normálvektora egy-egy egységvektor és mindegyik féltér tartalmazza az origót. Az $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ halmaz az $\mathbb{R}^2$ térben az első síknegyednek, az $\mathbb{R}^3$ térben pedig az első térnyolcadnak felel meg.

Konvex politop

Konvex politopnak azt a konvex poliédert nevezzük, amely korlátos. A konvex politopot (sok csúcsú alakzat) a korlátosság miatt "minden oldalról" hipersíkok határolják.

A konvex politopra igaz, hogy bármely pontja felírható a csúcspontjainak (extremális pontjainak) konvex lineáris kombinációjaként. Ha a konvex politop összes csúcspontját az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ jelöli, akkor a konvex politop tetszőleges $\mathbf{x}$ pontját a csúcspontok konvex kombinációjaként írhatjuk fel, azaz

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \lambda_i \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

Szimplex

Jelölje a konvex politop összes csúcspontját az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$. Ha az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ vektorok affin függetlenek, vagyis ha az $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_1$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor a konvex politopot szimplexnek nevezzük. Az $(m-1)$ darab vektor lineáris függetlensége azt jelenti, hogy a szimplex dimenziója $m-1$. Tehát a szimplexre az jellemző, hogy eggyel több csúcspontja van, mint amennyi a dimenziója. Szimplex az egydimenziós alakzatok közül a szakasz, a kétdimenziós alakzatok közül a háromszög, a háromdimenziós alakzatok közül pedig a tetraéder.

Ha $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor az

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \geqq 0$$

konvex poliédert standard szimplexnek nevezzük. Ez a konvex poliéder korlátos, így politop. Az extremális pontjai pedig az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ egységvektorok.

Konvex kónusz

Véges sok homogén féltér metszetét konvex kónusznak nevezzük. A konvex kónusz egy speciális konvex poliéder, amely az origót mindig tartalmazza. Ha van extremális pontja, akkor az csak az origó lehet. Egy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pontja esetén minden $\lambda > 0$ számra a $\lambda \mathbf{x}$ pontot is tartalmazza. A konvex kónuszra igaz, hogy bármely pontja felírható az extremális irányainak nemnegatív lineáris kombinációjaként. Ha a konvex kónusz összes extremális irányát a $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_k$ jelöli, akkor a konvex kónusz tetszőleges $\mathbf{x}$ pontját az extremális irányok nemnegatív kombinációjaként írhatjuk fel, azaz

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{d}_i, \quad \mu_i \geqq 0\,.$$

8. Karakterizációs tételek

Az alábbiakban a konvex poliéderekre vonatkozó négy nagyon fontos tételt ismertetünk. A tételek közül az elsőt bizonyítjuk. Először a standard alakú konvex poliéderre adjuk meg az összefüggéseket, majd az általános alakúra. A sokféle módon megadható konvex poliéderek közül kiválasztjuk az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ formájú konvex poliédert, ezt nevezzük **standard alakú konvex poliéder**nek. Tehát a standard alakban a konvex poliéder egyenletrendszerrel és nemnegativitással van megadva.

8.1. Standard alakú konvex poliéder esetén

8.1.1. Az extremális pont karakterizációja

TÉTEL (Az extremális pont karakterizációja)
Legyen adott egy nemüres konvex poliéder az $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$ alakban, ahol $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es mátrix, $\mathbf{b}$ egy m-es vektor.

Az $\mathbf{x}$ pont akkor és csak akkor extremális pontja az S konvex poliédernek, ha az $\mathbf{x}$ vektor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer nemnegatív bázismegoldása, azaz ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egy bázisához tartozó bázistáblázatban a $\mathbf{b}$ oszlopában minden elem nemnegatív.

Bizonyítás
(i) A bizonyítás első részében azt mutatjuk meg, hogy az $\mathbf{x}$ bázismegoldás extremális pont.

Indirekte tegyük fel, hogy az $\mathbf{x}$ bázismegoldás nem extremális pont. Eszerint létezik $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$, $(\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2)$, $0 < \lambda < 1$, amelyre $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$. Az $\mathbf{x}$ bázismegoldás, az $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{0})$ formában írható fel. Az $\mathbf{x}_B$ pozitivitása miatt az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ is $\mathbf{x}$-hez hasonlóan partícionált, azaz $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{x}_{1B}, \mathbf{0})$, $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{x}_{2B}, \mathbf{0})$. A lineáris függetlenség miatt a bázismegoldás egyértelmű, amiből következik, hogy $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, ami viszont ellentmondás. Tehát, ha az $\mathbf{x}$ nem extremális pont, akkor nem lehet bázismegoldás.

(ii) A bizonyítás második részében azt mutatjuk meg, hogy az $\mathbf{x}$ extremális pont bázismegoldás.

Indirekte tegyük fel, hogy az $\mathbf{x}$ extremális pont nem bázismegoldás. Legyen az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$, ahol minden $x_j > 0$ és $\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{k} x_j \mathbf{a}_j$. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ oszlopvektorok lineárisan nem függetlenek, mert az $\mathbf{x}$ pont nem bázismegoldás. A lineáris összefüggőség miatt az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ oszlopvektorok a zérus vektort előállítják nem csupa zérus együtthatóval, azaz $\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{a}_j$. Eszerint fennáll, hogy $\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{k} x_j \mathbf{a}_j \pm \varepsilon\mathbf{0}$, azaz $\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{k} x_j \mathbf{a}_j \pm \varepsilon \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{a}_j = \sum_{j=1}^{k} (x_j \pm \varepsilon\lambda_j)\mathbf{a}_j$ bármely ε-ra. Legyen $\mathbf{q} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$. A $\mathbf{b}$ előállítása alapján ekkor van két különböző olyan vektor, amely kielégíti az egyenletrendszert, ezek az $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{q}$ és az $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{q}$. Válasszuk ε-t olyanra, hogy $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \geqq \mathbf{0}$ legyen (mindig található $\varepsilon > 0$ szám). Így tehát van két olyan különböző vektorunk, amelyre $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$. Igaz továbbá, hogy $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2$, mert $\frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{q}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{q}) = \mathbf{x}$. Ez pedig ellentmond annak, hogy az $\mathbf{x}$ extremális pont. Tehát, ha az $\mathbf{x}$ nem bázismegoldás, akkor nem lehet extremális pont. **Q.e.d.**

8.1.2. Az extremális irány karakterizációja

TÉTEL (Az extremális irány karakterizációja)
Legyen adott egy nemüres konvex poliéder az $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$ alakban, ahol $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es mátrix, $\mathbf{b}$ egy m-es vektor.

A $\mathbf{d}$ irány akkor és csak akkor extremális iránya az S konvex poliédernek, ha a $\mathbf{d}$ vektor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer nemnegatív bázismegoldása, azaz ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

egyenletrendszer egy bázisához tartozó bázistáblázatban valamely $\mathbf{a}_j$ oszlopában minden elem nempozitív. Jelölje ezeket az elemeket egy $\mathbf{t}_j$ vektor, ekkor a $\mathbf{d}$ extremális irány a

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -\mathbf{t}_j \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix}$$

alakban írható fel, ahol $\mathbf{e}_j$ a j-edik egységvektor.

Megjegyezzük, ha az egyenletrendszer egy bázisához tartozó bázistáblázatban valamely $\mathbf{a}_j$ oszlopából a fentiekhez hasonló módon olvasunk ki egy $\mathbf{d}$ vektort, akkor az a homogén egyenletrendszer egy bázismegoldása, azaz $\mathbf{Ad} = \mathbf{0}$, természetesen ez a $\mathbf{d}$ csak akkor lesz extremális irány, ha $\mathbf{d} \geqq \mathbf{0}$.

8.1.3. Reprezentációs tétel

Legyen adott egy nemüres konvex poliéder az $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$ alakban, ahol $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es mátrix, $\mathbf{b}$ egy m-es vektor. Legyenek $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ az S konvex poliéder extremális pontjai és legyenek $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_r$ az S konvex poliéder extremális irányai.

Az S konvex poliéder tetszőleges $\mathbf{x}$ pontja felírható az extremális pontok konvex kombinációjának és az extremális irányok nemnegatív kombinációjának a vektori összegeként, azaz képletben

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^{r} \mu_i \mathbf{d}_i, \quad \text{ahol} \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j,\ \mu_i \geqq 0.$$

A tétel megfordítva is igaz, azaz bizonyos vektoroknak a fenti képlettel megadott kombinációja konvex poliéder.

A tétel szemléletesen azt mutatja, hogy egy konvex poliéder előállítható az extremális pontjai által alkotott politop és az extremális irányai által alkotott konvex kónusz vektori összegeként.

A tétel az implicit alakban adott konvex poliédernek az explicit előállítását mondja ki.

A karakterizációs tételek tulajdonképpen kezünkbe adnak egy módszert az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ standard formában adott konvex poliéder extremális pontjainak és extremális irányainak meghatározására. A reprezentációs tétel pedig a konvex poliédernek az extremális pontjai és extremális irányai segítségével való előállítását mondja ki.

Az alábbiakban egy példán mutatunk be az előzőekre.

8.1.4. Példa standard alakú konvex poliéderre

Tekintsük az alábbi standard alakú konvex poliédert. Határozzuk meg a konvex poliéder összes extremális pontját és extremális irányát, majd állítsuk elő a konvex poliédert explicit alakban!

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
4x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\
3x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 5 \\
16x_1 & + & 9x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 25 \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Először foglalkozzunk az egyenletrendszerrel. Az egyenletrendszer együtthatómátrixa és jobboldala az alábbi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 16 & 9 & -5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszert az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mátrixos alak mellett a további vizsgálódásunkban számunkra fontosabb vektoros alakban is felírhatjuk, amely a következő:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{b},$$

ahol $\mathbf{a}_j$ $(j = 1, ..., 4)$ az egyenletrendszer együtthatómátrixának oszlopvektorai. Az egyenletrendszer vektoros formája részletezve, az alábbi:

$$x_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 16 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer vektoros alakjából láthatjuk, hogy az egyenletrendszert megoldani annyit jelent, mint a jobboldal vektorát előállítani az ismeretlenek együtthatóvektorainak (az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektoroknak) lineáris kombinációjaként. Indulásképpen írjuk fel az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_4$ együtthatóvektorokat és a $\mathbf{b}$ jobboldal vektort az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ egységvektorok (mint bázisvektorok) lineáris kombinációjaként. A lineáris kombinációkban szereplő együtthatók nyilvánvalóan a vektorok koordinátái lesznek.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 16\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{a}_2 &= 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 9\mathbf{e}_3, \\ & \quad ..... \\ \mathbf{b} &= 5\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 25\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Írjuk be ezeket a lineáris kombinációkat egy ún. bázistáblázatba úgy, hogy az előállító vektorok (bázisvektorok) a bal szegélyre kerüljenek, az előállított vektorok pedig a felső szegélyre. Ezzel a triviális báziselőállítással az alábbi bázistáblát kapjuk. Az előállító egységvektorokat szerepeltethetjük a felső szegélyen is, azok előállítása nyilvánvaló. Tehát az induló bázistáblázat az alábbi:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	4	$\boxed{1}$	-5	2	5	1	0	0
$\mathbf{e}_2$	3	2	0	-1	5	0	1	0
$\mathbf{e}_3$	16	9	-5	-2	25	0	0	1

Pivotálás segítségével hozzuk bázisba az oszlopvektorokat. Emlékeztetőül ismertetjük a pivotálást. Az új előállításhoz tartozó bázistáblázatot a Gauss-Jordan technikával számoljuk ki. A számolás lényege a következő:

- A kicserélendő két vektor (példánkban az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{a}_2$) ütközőpontjában lévő elemet megjelöljük (bekeretezzük), ezt az elemet pivotelemnek nevezzük. A pivotelem csak zérustól különböző szám lehet, egyébként a vektorcserével kapott bal szegélyen szereplő új vektorok nem alkothatnak bázist, nem lesznek lineárisan függetlenek.

- A pivotelem sorát (pivotsort) a pivotelemmel osztjuk.
- A többi sort pedig úgy kapjuk, hogy a sorból kivonjuk a pivotsor annyiszorosát, hogy a pivotoszlopbeli elemek kinullázódjanak.

A fenti pivotálási szabályokat alkalmazva az alábbi új bázistáblázatot kapjuk:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{a}_2$	4	1	-5	2	5	1	0	0
$\mathbf{e}_2$	-5	0	10	$\boxed{-5}$	-5	-2	1	0
$\mathbf{e}_3$	-20	0	40	-20	-20	-9	0	1

A további vektorcserét ($\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{a}_4$ cseréje) elvégezve az alábbi bázistáblát kapjuk:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{a}_2$	2	1	-1	0	3	1/5	2/5	0
$\mathbf{a}_4$	1	0	-2	1	1	2/5	-1/5	0
$\mathbf{e}_3$	0	0	0	0	0	-1	-4	1

Eljutottunk ahhoz a bázistáblához, amelyben a $\mathbf{b}$ vektor az $\mathbf{a}_j$ együtthatóvektorokkal van előállítva. Az előállítás, a táblázatból kiolvasva (az előállításban nem szereplő vektorok együtthatóját zérusnak tekintve) az alábbi:

$$\mathbf{b} = 0\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 + 1\mathbf{a}_4.$$

Ebből pedig az egyenletrendszer megoldása egyszerűen megállapítható:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1.$$

Az egyenletrendszer fenti megoldását bázismegoldásnak nevezzük. Amennyiben más vektorcseréket hajtottunk volna végre, akkor másik bázismegoldáshoz jutottunk volna.

Az egyenletrendszer bázismegoldásának definíciója

Azt a megoldást, amelynél a $\mathbf{b}$ vektor előállításában a bázisvektorok együtthatója nem zérus, a nembázis vektorok együtthatója pedig zérus, bázismegoldásnak nevezzük. Ha a bázisvektorok együtthatója között zérus is van, akkor degenerált bázismegoldásról beszélünk.

Az egyenletrendszer azon változóit, amelyek a bázisvektorokhoz tartoznak bázisváltozóknak, a nem bázisvektorokhoz tartozókat nem bázisváltozóknak nevezzük. A fenti példában a bázisváltozók: x_2, x_4; a nem bázisváltozók pedig: x_1, x_3.

A homogén egyenletrendszer bázismegoldásának definíciója

Az egyenletrendszerhez tartozó $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer bázismegoldását a következők szerint definiáljuk. Tekintsünk egy olyan oszlopvektort, amely nem került a bázisba, legyen ez például az $\mathbf{a}_1$ vektor, amely a bázistáblából a következőképpen olvasható ki: $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 + 3\mathbf{a}_4$, amely átrendezve $1\mathbf{a}_1 + (-2)\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 + (-3)\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$. Ebből pedig az $[1, -2, 0, -3]$ vektor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer egy megoldása. Bázismegoldásnak azért nevezzük, mert bázistáblázatból kapott megoldásról van szó.

Az alábbiakban a bázistáblák között egy nevezetes összefüggésre is felhívjuk a figyelmet, ezt kompozíciós tételként is szokták emlegetni.

TÉTEL (kompozíciós tétel)
Tekintsünk egy induló bázistáblát

$\mathbf{A}$	$\mathbf{E}$

Bármely számú pivotálást elvégezve, kapunk egy újabb bázistáblát, amely legyen a következő:

$\mathbf{T}$	$\mathbf{Y}$

Ekkor a két bázistábla adataira érvényes a következő összefüggés

$$\mathbf{T} = \mathbf{Y}\mathbf{A}.$$

Pivotálással nemcsak egyenletrendszer, ill. homogén egyenletrendszer bázismegoldását lehet előállítani, hanem alkalmas az együtthatómátrix rangjának, a bázis inverzének meghatározására is. Vegyük ezeket sorra a fenti példán keresztül.

a) Az együtthatómátrix rangja 2, mivel az oszlopvektorai közül 2 vektor lineárisan független (ezek bázisvektorok) és több vektor nem lehet lineárisan független. A 3. egyenlet tehát az összefüggőség miatt elhagyható.

b) A fentebb bemutatott pivotálással a bázisba hozott vektorok alkotta mátrixnak az inverze is kiolvasható. A 3. egyenlet az összefüggőség miatt elhagyható. Az $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ bázisbeli oszlopvektorokból (a 3. elemet nem tekintve) az adott sorrendben készített $\mathbf{A}_B$ mátrix inverze az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ egységvektorok alatti blokkból kiolvasott mátrix lesz, azaz

$$\mathbf{A}_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & \text{-}1/5 \end{bmatrix}.$$

Ha a bázisvektorokból más sorrendben építjük fel az $\mathbf{A}_B$ mátrixot, akkor ennek inverze megfelelő sorcserékkel olvasható ki.

c) A fentebb bemutatott pivotálással az egyenletrendszer összes megoldása (explicit alakban való megadása) is felírható, mégpedig az egyenletrendszer egy bázismegoldásának és a homogén egyenletrendszer összes megoldásának összegeként:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix},$$

ahol $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. A bázismegoldást a $\mathbf{b}$ vektor alól, a homogén egyenletrendszer összes megoldását pedig a bázisba nem kerülő vektorok alatti részből (negatív előjellel) olvashatjuk ki.

E kis kitérő után most térjük vissza az eredeti konvex poliéder extremális pontjainak és extremális irányainak meghatározására. A karakterizációs tételek szerint az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$

konvex poliéder extremális pontjait, ill. extremális irányait az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer nemnegatív bázismegoldásai, ill. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer nemnegatív bázismegoldásai szolgáltatják. Határozzuk meg tehát az egyenletrendszer összes bázismegoldását (bázistáblázatát) és azokból kiolvassuk a számunkra megfelelő vektorokat. További bázistáblázatokhoz a korábban kapott bázistáblából kiindulva újabb pivotálással (báziscserével) jutunk. Három megjegyzést teszünk a további számoláshoz. Az első, hogy az egységvektorokat a továbbiakban nem tüntetjük fel, mivel azok a bázismegoldások felkutatásánál nem játszanak szerepet. Eddigi szerepeltetésük célja csupán az volt, hogy a bázisinverz pivotálással történő meghatározását is bemutassuk. A második megjegyzés az, hogy rövid táblát használunk, ahol nem tüntetjük fel azokat az oszlopvektorokat, amelyek bázisban vannak, hisz ott az előállítás nyilvánvaló. Harmadik megjegyzés pedig az, hogy vektorok helyett a továbbiakban a változókat szerepeltetjük. A rövid tábla a fenti megjegyzésekkel:

	x_1	x_3	
x_2	2	-1	3
x_4	1	-2	1

Pivotálások sorozatával az alábbi bázistáblákat nyerjük:

	x_2	x_3	
x_1	1/2	-1/2	3/2
x_4	-1/2	-3/2	-1/2

	x_1	x_2	
x_3	-2	-1	-3
x_4	-3	-2	-5

	x_4	x_3	
x_2	-2	3	1
x_1	1	-2	1

	x_1	x_4	
x_2	3/2	-1/2	5/2
x_3	-1/2	-1/2	-1/2

	x_2	x_4	
x_1	2/3	-1/3	5/3
x_3	1/3	-2/3	1/3

A fenti öt bázistáblázatból az egyenletrendszer nemnegatív bázismegoldásait kiolvasva kapjuk a konvex poliéder extremális pontjait, ill. a homogén egyenletrendszer nemnegatív bázismegoldásaiból pedig a konvex poliéder extremális irányait, amelyek a következők:

A konvex poliéder extremális pontjai:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A konvex poliéder extremális irányai

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Végezetül a reprezentációs tétel értelmében a konvex poliéder összes pontját az extremális pontok konvex kombinációinak és az extremális irányok nemnegatív kombinációinak az összege adja, azaz:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,\ \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geqq 0,\ \ \mu_1, \mu_2 \geqq 0.$$

8.2. Nem standard alakú konvex poliéder esetén

Felvetődik a kérdés, hogyan határozhatók meg más formában (nem standard alakban) adott konvex poliéder extremális pontjai és extremális irányai. Erre a következő tétel ad választ.

8.2.1. Karakterizációs tétel

TÉTEL (Általános formában adott konvex poliéder extremális pontjának és irányának karakterizációja)

Legyen adott egy nem standard alakú konvex poliéder az alábbi általános formában:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1\mathbf{x} &\leqq \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_2\mathbf{x} &= \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{A}_3\mathbf{x} &\geqq \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{A}_1$ $m_1 \times n$-es, $\mathbf{A}_2$ $m_2 \times n$-es, $\mathbf{A}_3$ $m_3 \times n$-es mátrix, a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ pedig m_1, m_2, m_3 dimenziós vektor. A fenti formában adott konvex poliéder extremális pontjai és extremális irányai megegyeznek az

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{E}_1\mathbf{u} &= \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_2\mathbf{x} &= \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{A}_3\mathbf{x} - \mathbf{E}_3\mathbf{v} &= \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{u} &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{v} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}$$

formára alakított konvex poliéder extremális pontjaival és extremális irányaival, ahol $\mathbf{E}_1$ $m_1 \times m_1$-es, $\mathbf{E}_3$ $m_3 \times m_3$-as egységmátrix, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ pedig m_1, m_3 dimenziós vektor.

A tétel tulajdonképpen a következőt fejezi ki geometriailag:

A nem standard poliéder $\mathbf{x}$ vektorai az n-dimenziós térben vannak. A standardizálással áttértünk az $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ vektorokra, azaz áttértünk az $(n + m_1 + m_3)$-dimenziós térre. A két térben mindegyik extremális pont és extremális irány kölcsönösen megfeleltethető egymásnak.

A tételben használt $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ változókat hiányváltozóknak, ill. feleslegváltozóknak szokás nevezni.

Ezen utóbbi tétel szerint egy előjelkötött formában ($\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$), egyenletekkel és/vagy egyenlőtlenségekkel adott konvex poliéder extremális pontjait és extremális irányait az extremális pontra és az extremális irányra vonatkozó karakterizációs tételek valamint ezen utóbbi tétel értelmében úgy kell meghatározni, hogy

– először új nemnegatív változók bevezetésével egyenletekké (standard formára) alakítjuk az egyenlőtlenségeket,

– utána meghatározzuk ennek az új konvex poliédernek az extremális pontjait és extremális irányait,

– az eredeti konvex poliéder extremális pontjait és extremális irányait pedig úgy kapjuk, hogy az $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ vektorokból csak az $\mathbf{x}$ partíciót tekintjük.

Mint láthatjuk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ formának központi jelentősége van a konvex poliéderek vizsgálatában.

Megjegyzés:

A konvex poliéderek legáltalánosabb formája az, amelyben az ismeretlenek nem mindegyikére van megkötve a nemnegativitás. Legyen az $\mathbf{x}$ vektor partícionálva az $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ módon.

A konvex poliéderek legáltalánosabb formája az alábbi:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{13}\mathbf{x}_3 & \leqq & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{23}\mathbf{x}_3 & = & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{A}_{31}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{32}\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{33}\mathbf{x}_3 & \geqq & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{x}_1 & \geqq & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{x}_2 \text{ előjelkötetlen} \\ \mathbf{x}_3 & \leqq & \mathbf{0} \end{array}$$

Új változók bevezetésével biztosíthatjuk az ismeretlenekre a teljes nemnegativitást az alábbi módon:

Legyen $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2^+ - \mathbf{x}_2^-$, ahol $\mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_2^- \geqq \mathbf{0}$ és legyen $\hat{\mathbf{x}}_3 = -\mathbf{x}_3$, ezzel minden ismeretlen nemnegatív lesz. Ekkor az átalakított formára az alábbiakat kapjuk:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2^+ - \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2^- - \mathbf{A}_{13}\hat{\mathbf{x}}_3 + \mathbf{E}_1\mathbf{u} & = & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2^+ - \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2^- - \mathbf{A}_{23}\hat{\mathbf{x}}_3 \phantom{+ \mathbf{E}_1\mathbf{u}} & = & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{A}_{31}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{32}\mathbf{x}_2^+ - \mathbf{A}_{32}\mathbf{x}_2^- - \mathbf{A}_{33}\hat{\mathbf{x}}_3 - \mathbf{E}_3\mathbf{v} & = & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{x}_1 & \geqq & \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_2^- & \geqq & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{x}}_3 & \geqq & \mathbf{0} \\ \mathbf{u} & \geqq & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} & \geqq & \mathbf{0} \end{array}$$

Erre az esetre azonban nem igaz a fenti tétel. Az igaz csupán, hogy az eredeti rendszer extremális pontjai egyben az új rendszer nemnegatív bázismegoldásai, de fordítva nem igaz. Az új rendszer egy nemnegatív bázismegoldása nem biztos, hogy az eredeti rendszer extremális pontja.

8.2.2. Reprezentációs tétel

Legyen adott egy nem standard alakú konvex poliéder. Legyenek $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ a konvex poliéder extremális pontjai és legyenek $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_r$ a konvex poliéder extremális irányai.

A konvex poliéder tetszőleges $\mathbf{x}$ pontja felírható az extremális pontok konvex kombinációjának és az extremális irányok nemnegatív kombinációjának a vektori összegeként, azaz képletben

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^{r} \mu_i \mathbf{d}_i, \quad \text{ahol} \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j,\ \mu_i \geq 0.$$

A tétel megfordítva is igaz, azaz bizonyos vektoroknak a fenti képlettel megadott kombinációja konvex poliéder.

Tehát ugyanaz a reprezentációs tétel igaz a nem standard alakú konvex poliéderre is, mint a standard alakúra. Csak az extremális pontok és irányok meghatározásánál kell standardizálást végezni.

8.2.3. Példa nem standard alakú konvex poliéderre

Tekintsük az alábbi általános alakban adott konvex poliédert. Határozzuk meg az összes extremális pontját és extremális irányát, majd írjuk fel explicit alakban is!

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & \leqq & 90 \\
x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \geqq & 50 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 60 \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geqq & 0
\end{array}$$

Először írjuk fel a megfelelő standard alakot, célszerű a v feleslegváltozó helyett is u hiányváltozót használni, ha beszorozzuk (-1)-el a második egyenlőtlenséget:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & u_1 & & & = & 90 \\
- & x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & & + & u_2 & = & -50 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & & & = & 60 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & u_1 & , & u_2 & \geqq & 0
\end{array}$$

Az induló bázistáblázatot már rövid táblaként és változókkal írjuk. Látható, hogy az oszlopvektorok között két darab egységvektor is szerepel, ha bevezetünk segítségképpen egy új nemnegatív u_3^* változót, amelyet a harmadik egyenlethez adunk, akkor ebben a segédfeladatban megjelenik a harmadik egységvektor is, így az induló bázistáblázat az alábbi:

	x_1	x_2	x_3	
u_1	1	4	-2	90
u_2	-1	-3	-1	-50
u_3^*	$\boxed{1}$	2	-1	60

Első lépésként az u_3^* változót kivisszük a bázisból, az u_3^* változó oszlopát el is hagyhatjuk, hisz az csak egy segédváltozó volt, így az alábbi bázistáblázatot kapjuk:

	x_2	x_3	
u_1	2	-1	30
u_2	-1	-2	10
x_1	2	-1	60

Most már az új egyenletrendszernek egy bázismegoldása rendelkezésünk áll, mivel ez nemnegatív, így az új konvex poliédernek ($\mathbb{R}^5$-beli) egy extremális pontja is egyben, amely a következő

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

A tétel szerint ez az eredeti konvex poliédernek ($\mathbb{R}^3$-beli) is egy extremális pontja, amely a következő:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A táblázatból kiolvasható új egyenletrendszerhez tartozó homogén egyenletrendszernek egy nemnegatív bázismegoldása, amely a karakterizációs tétel szerint az új konvex poliéder egy extremális iránya

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A tétel szerint ez az eredeti konvex poliédernek ($\mathbb{R}^3$-beli) is egy extremális iránya, amely a következő:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egy extremális pont és egy extremális irány meghatározásával megmutattuk a tétel alkalmazását. A további számításokat az olvasóra bízzuk.

9. Lineáris programozás elmélete

Az olyan optimalizálási feladatot, amelyben egy konvex poliéderen kell egy lineáris függvény (célfüggvény) optimumát meghatározni, lineáris programozási feladatnak nevezzük.

TÉTEL
Tekintsük az

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{cx} &\to \text{min!} \end{aligned}$$

formában adott standard lineáris programozási feladatot, ahol a konvex poliéder: $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$. Az $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es mátrix, $\mathbf{b}$ egy m-es vektor, $\mathbf{c}$ egy n-es vektor.

Legyenek $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ az S konvex poliéder extremális pontjai és legyenek $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_r$ az S konvex poliéder extremális irányai.

Ha valamely i indexre $\mathbf{cd}_i < 0$, akkor a feladatnak nincs véges optimális megoldása.

Ha minden i indexre $\mathbf{cd}_i \geqq 0$, akkor a feladatnak van véges optimális megoldása és ez legalább egy extremális pontban felvétetik. Ha több extremális pontban is ugyanaz az optimális célfüggvényérték adódik, akkor ezen extremális pontok minden konvex kombinációja is optimális megoldás.

Példa: Tekintsük az alábbi standard lineáris programozási feladatot, amelynek feltételi halmaza az előző példák egyikében szereplő konvex poliéder.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
4x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\
3x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 5 \\
16x_1 & + & 9x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 25 \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \\
3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & \to & \min!
\end{array}$$

Az előző példából ismertek az extremális pontok és az extremális irányok. Mivel $\mathbf{cd}_1 = 9$, $\mathbf{cd}_2 = 17$, azaz mindegyik nemnegatív, a fenti tétel alapján a lineáris programozási feladatnak véges minimuma van. Az extremális pontokban a célfüggvények értékei: $\mathbf{cx}_1 = 5$, $\mathbf{cx}_2 = 4$, $\mathbf{cx}_3 = 19/3$, ezekből kiválasztva a minimális értéket, megkapjuk az egyedüli optimális megoldást, amely az $\mathbf{x}_2$ extremális pont.

A lineáris programozási (LP) feladatra vonatkozó előző tétel a feladatot geometriai oldalról világította meg. Az alábbiakban a lineáris programozás dualitási problémakörével foglalkozunk. A feladathoz hozzárendelünk egy szintén lineáris programozási feladatot, az ún. **duál feladat**ot. Az eredeti feladatot **primál feladat**nak, a két feladatot együtt pedig **feladatpár**nak nevezzük. A feladatpár standard alakja a következő:

$$\begin{array}{cc}
\text{Primál feladat} & \text{Duál feladat} \\
\left.\begin{array}{c}\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\end{array}\right\} P & \mathbf{yA} \leqq \mathbf{c}\} \, D \\
\mathbf{cx} \to \min! & \mathbf{yb} \to \max!
\end{array}$$

A P és D feltételi halmazokat lehetséges megoldások halmazának vagy megengedett megoldások halmazának nevezzük. Az alábbiakban a két feladat közötti összefüggéseket ismertetjük. Először a lehetséges megoldásokhoz tartozó célfüggvényértékek közötti összefüggést, az ún. LP alaplemmát, majd annak következményeit, majd a megoldhatóság és a célfüggvény korlátossága közötti összefüggést, végül az optimális megoldás létezésére vonatkozó ún. dualitási tételt ismertetjük.

LINEÁRIS PROGRAMOZÁS ALAPLEMMÁJA

Ha $\mathbf{x} \in P$ és $\mathbf{y} \in D$, azaz $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ lehetséges megoldások, akkor a célfüggvényértékek között

$$\mathbf{cx} \geqq \mathbf{yb}$$

összefüggés áll fenn, a $\mathbf{cx} = \mathbf{yb}$ egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$(\mathbf{ya}_j - c_j)x_j = 0$$

minden $j = 1, \ldots, n$ indexre.

Bizonyítás

Ha $\mathbf{y} \in D$, akkor $\mathbf{yA} \leqq \mathbf{c}$ teljesül. Szorozzuk be az egyenlőtlenséget az $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ vektorral, ekkor $(\mathbf{yA})\mathbf{x} \leqq \mathbf{cx}$, felhasználva a vektor-mátrix szorzás asszociativitását, azaz $(\mathbf{yA})\mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{Ax})$ és az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ primál feltételt, kapjuk, hogy $\mathbf{yb} \leqq \mathbf{cx}$. Az $\mathbf{yAx} \leqq \mathbf{cx}$ rendezve $(\mathbf{yA} - \mathbf{c})\mathbf{x} \leqq 0$, részletezve a skaláris szorzatot

$$\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{ya}_j - c_j)x_j \leqq 0$$

Mivel a tagokban szereplő szorzat első tényezője nempozitív, a második pedig nemnegatív, így az összes tag nemnegatív, amelyeknek az összege akkor és csak akkor lehet zérus, ha minden tag zérus, azaz minden j-re $(\mathbf{ya}_j - c_j)x_j = 0$. **Q.e.d.**

LINEÁRIS PROGRAMOZÁS ALAPLEMMÁJÁNAK KÖVETKEZMÉNYE

Ha valamely $\mathbf{x}^* \in P$ és $\mathbf{y}^* \in D$ esetén $\mathbf{cx}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b}$, akkor az $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ lehetséges megoldások optimálisak.

Bizonyítás

Legyen $\mathbf{x} \in P$ tetszőleges, ekkor az alaplemma szerint az $\mathbf{x} \in P$ és $\mathbf{y}^* \in D$ lehetséges megoldásokra $\mathbf{cx} \geqq \mathbf{y}^*\mathbf{b}$, viszont a feltételezés szerint $\mathbf{y}^*\mathbf{b} = \mathbf{cx}^*$, ezért

$$\mathbf{cx} \geqq \mathbf{cx}^* \quad \text{minden } \mathbf{x} \in P \text{ esetén,}$$

ami az $\mathbf{x}^*$ optimalitását mutatja. Az $\mathbf{y}^*$ optimalitásának igazolása hsonlóan történik, ennek elvégzését az olvasóra bízzuk. **Q.e.d.**

LINEÁRIS PROGRAMOZÁS KORLÁTOSSÁGI-MEGOLDHATÓSÁGI TÉTELE

a) Tegyük fel, hogy a primál feladatnak van lehetséges megoldása, azaz $P \neq \emptyset$. A primál feladat $\mathbf{cx}$ célfüggvénye akkor és csak akkor korlátos alulról, ha a duál feladatnak van lehetséges megoldása, azaz $D \neq \emptyset$.

b) Tegyük fel, hogy a duál feladatnak van lehetséges megoldása, azaz $D \neq \emptyset$. A duál feladat $\mathbf{yb}$ célfüggvénye akkor és csak akkor korlátos felülről, ha a primál feladatnak van lehetséges megoldása, azaz $P \neq \emptyset$.

Bizonyítás

Az a) rész bizonyítása, először az egyik irányt, majd a másik irány bizonyítjuk.

i) $D \neq \emptyset \Longrightarrow \mathbf{cx}$ korlátos alulról:

Tegyük fel, hogy $D \neq \emptyset$, azaz van legalább egy $\mathbf{y}$, ekkor az alaplemma szerint $\mathbf{cx} \geqq \mathbf{yb}$, amiből látható, hogy $\mathbf{cx}$ alulról korlátos.

ii) $D = \emptyset \Longrightarrow \mathbf{cx}$ nem korlátos alulról:

Tegyük fel, hogy $D = \emptyset$, azaz nincs olyan $\mathbf{y}$, amelyre $\mathbf{yA} \leqq \mathbf{c}$, vagyis az $\mathbf{yA} \leqq \mathbf{c}$ rendszer nem oldható meg. A Farkas tétel 4. változata szerint ekkor van olyan $\bar{\mathbf{x}}$, amelyre $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} < 0$. Ahhoz, hogy ezt belássuk a Farkas tétel 4. változatát át kell írni az alábbi formára:

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \\ \mathbf{yA} \leqq \mathbf{c} \qquad & \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \\ & \mathbf{cx} < 0 \end{array}}$$

Mivel létezik $\mathbf{x}$ és $\bar{\mathbf{x}}$, így képezzük az

$$\mathbf{x} + \lambda\bar{\mathbf{x}} \text{ vektort minden } \lambda \geqq 0 \text{ értékre.}$$

Igaz, hogy $\mathbf{x} + \lambda\bar{\mathbf{x}} \in P$ minden $\lambda \geqq 0$ értékre, ugyanis $\mathbf{x} + \lambda\bar{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \lambda\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{b}$, mivel $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ és $\lambda\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Az $\mathbf{x} + \lambda\bar{\mathbf{x}}$ primál megoldáshoz tartozó célfüggvény

$$\mathbf{c}(\mathbf{x} + \lambda\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{cx} + \lambda\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} \to -\infty,$$

ha $\lambda \to +\infty$, mert $\mathbf{cx}$ fix érték, $\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} < 0$.

A b) rész bizonyítása hasonlóan történik, ennek elvégzését az olvasóra bízzuk. Itt a Farkas tételnek az alapváltozatát (standard alakját) kell használni. **Q.e.d.**

LINEÁRIS PROGRAMOZÁS DUALITÁSI TÉTELE

Ha mind a primál mind a duál feladatnak van lehetséges megoldása, azaz $P \neq \emptyset, D \neq \emptyset$, akkor vannak olyan $\mathbf{x}^* \in P$ és $\mathbf{y}^* \in D$ lehetséges megoldások, amelyekre

$$\mathbf{cx}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b},$$

az alaplemma következménye szerint ekkor létezik optimális feladatpár.

Bizonyítás

Sokféle bizonyítás létezik, mi a Farkas tételre alapozzuk a bizonyítást. Be kell látni, hogy van olyan $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ lehetséges megoldáspár, amelyre

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{yA} &\leqq \mathbf{c} \\ \mathbf{cx} &= \mathbf{yb} \end{aligned}$$

Mivel az alaplemma szerint a lehetséges megoldásokra $\mathbf{cx} < \mathbf{yb}$ nem lehet, így a $\mathbf{cx} = \mathbf{yb}$ helyett írhatjuk $\mathbf{cx} \leqq \mathbf{yb}$, tehát a rendszer

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{yA} &\leqq \mathbf{c} \\ \mathbf{cx} - \mathbf{yb} &\leqq 0 \end{aligned}$$

Indirekte tegyük fel, hogy a fenti rendszernek nincs megoldása. Ha igaz a bizonyítandó állítás, akkor ellentmondásra kell jutnunk. Ha ennek a rendszernek nincs megoldása, akkor a Farkas tétel szerint egy másik rendszernek van megoldása. Ahhoz, hogy a fenti rendszer alternatív párját felírhassuk átalakítjuk olyan rendszerré, amelynek ismerjük a párját. Javasoljuk a Farkas tétel 4. változatát, azaz hozzuk $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} \leqq \tilde{\mathbf{b}}$ formára, amelynek alternatív párja $\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$, $\tilde{\mathbf{y}} \geqq \mathbf{0}$, $\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{b}} < 0$. Az átalakított rendszer

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\leqq \mathbf{b} \\ -\mathbf{Ax} &\leqq -\mathbf{b} \\ -\mathbf{Ex} &\leqq \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} &\leqq \mathbf{c} \\ \mathbf{cx} - \mathbf{yb} &\leqq 0 \end{aligned}$$

Ennek alternatív párja, amelynek a Farkas tétel szerint van megoldása a következő (részletezését, a séma felrajzolását az olvasóra bízzuk)

$$\begin{aligned}
\mathbf{uA} &\leqq \vartheta\mathbf{c}\\
\mathbf{Av} &= \vartheta\mathbf{b}\\
\mathbf{v} &\geqq \mathbf{0}\\
\mathbf{cv}-\mathbf{ub} &< 0\\
\vartheta &\geqq 0
\end{aligned}$$

Két esetet vizsgálunk ϑ értékétől függően:
i) $\vartheta = 0$ eset

$$\begin{aligned}
\mathbf{uA} &\leqq 0\\
\mathbf{Av} &= 0\\
\mathbf{v} &\geqq 0\\
\mathbf{cv}-\mathbf{ub} &< 0
\end{aligned}$$

Tekintsünk az $\mathbf{x} \in P$ és $\mathbf{y} \in D$ lehetséges megoldásokat, ekkor mivel létezik $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, képezhetjük az $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{v}$ és az $\mathbf{y} + \lambda\mathbf{u}$ vektorokat minden $\lambda \geqq 0$ számra. Azt állítjuk, hogy ezek lehetséges primál, ill. duál megoldások, azaz

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}+\lambda\mathbf{v} &\in P\\
\mathbf{y}+\lambda\mathbf{u} &\in D
\end{aligned}$$

minden $\lambda \geqq 0$ számra. Ennek igazolását az olvasóra bízzuk. (hasonlóan bizonyítható a korlátossági-megoldhatósági tételnél látottakhoz). Amennyiben ezek lehetséges megoldások, úgy teljesedni kell az alaplemmának, azaz

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{v}) \geqq (\mathbf{y}+\lambda\mathbf{u})\mathbf{b},$$

amelyet átrendezve, kapjuk, hogy

$$(\mathbf{cx}-\mathbf{yb}) + \lambda(\mathbf{cv}-\mathbf{ub}) \geqq 0 \text{ minden } \lambda \geqq 0 \text{ esetén.}$$

A $(\mathbf{cx}-\mathbf{yb})$ fix érték, $(\mathbf{cv}-\mathbf{ub}) < 0$, így a baloldal λ növekedésével minden határon túl csökken, így nem állhat fenn a fenti összefüggés, tehát ellentmondáshoz jutottunk.

ii) $\vartheta > 0$ eset
Ebben az esetben beoszthatunk ϑ-val és ekkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathbf{u}}{\vartheta}\right)\mathbf{A} &\leqq \mathbf{c}\\
\mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{v}}{\vartheta}\right) &= \mathbf{b}\\
\left(\frac{\mathbf{v}}{\vartheta}\right) &\geqq \mathbf{0}\\
\mathbf{c}\left(\frac{\mathbf{v}}{\vartheta}\right) - \left(\frac{\mathbf{u}}{\vartheta}\right)\mathbf{b} &< 0
\end{aligned}$$

Látható, hogy a $\binom{\mathbf{v}}{\vartheta}$ primál lehetséges megoldás, az $\binom{\mathbf{u}}{\vartheta}$ duál lehetséges megoldás, ekkor viszont az alaplemma szerint

$$\mathbf{c}\left(\frac{\mathbf{v}}{\vartheta}\right)-\left(\frac{\mathbf{u}}{\vartheta}\right)\mathbf{b} \geqq 0,$$

ami ellentmondás. Tehát az eredeti rendszer oldható meg, így tehát, ha $P \neq \emptyset$, $D \neq \emptyset$, akkor létezik optimális megoldáspár. **Q.e.d.**