KVADRATIKUS PROGRAMOZÁS

DR. NAGY TAMÁS
egyetemi docens

Miskolci Egyetem
Alkalmazott Matematikai Tanszék

„A bemutatott kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg”
„This research was carried out as part of the TAMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 project with support by the European Union, co-financed by the European Social Fund.”

Miskolc, 2011

Tartalomjegyzék

1. A kvadratikus programozási feladat megfogalmazása

Kvadratikus programozási feladatnak nevezzük az olyan optimalizálási feladatot, amelyben a feltételek lineárisak, a célfüggvény pedig egy kvadratikus függvény. A lineáris programozáshoz hasonlóan a kvadratikus programozásnak is számtalan különböző formája használatos, a vizsgálatokhoz tekintsük a következő, **szimmetrikus alakban** adott kvadratikus programozási primál-duál feladatpárt:

Primál feladat

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{z} &\geqq \mathbf{b}\\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}\end{aligned}\right\} P$$

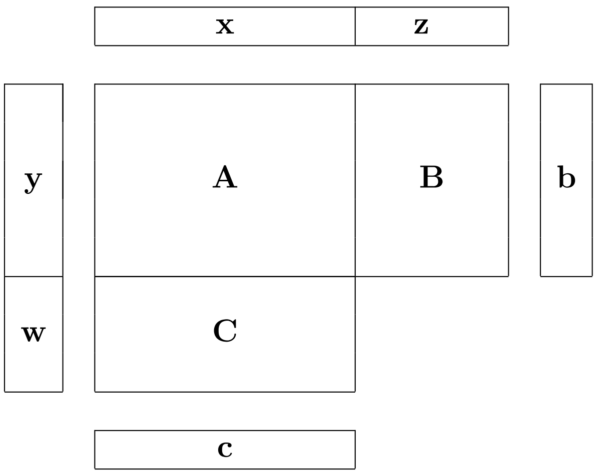
$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}+\frac{1}{2}(\mathbf{C}\mathbf{x})^2+\frac{1}{2}\mathbf{z}^2 \to \min!$$

Duál feladat

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{y}^T\mathbf{A}-\mathbf{w}^T\mathbf{C} &\leqq \mathbf{c}^T\\ \mathbf{y}^T &\geqq \mathbf{0}^T\end{aligned}\right\} D$$

$$\mathbf{y}^T\mathbf{b}-\frac{1}{2}(\mathbf{y}^T\mathbf{B})^2-\frac{1}{2}\mathbf{w}^2 \to \max!$$

ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ adottak, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$ a programozási feladat primál döntési változója, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^l$ a programozási feladat duál döntési változója. Jelölje P, ill. D a lehetséges primál, ill. duál megoldások halmazát. Az alábbiakban közöljük a feladatpár sémáját, amely könnyebbé teheti a feladatpár megjegyzését:



Megjegyzések:

Ha $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, akkor a lineáris programozási feladatot kapjuk.

A gyakorlatban előforduló kvadratikus programozási feladatokban sok esetben vagy a **B** vagy a **C** mátrix hiányzik, ezekben az esetekben természetesen vagy a **z** vagy a **w** tetszőleges előjelű változók is hiányoznak.

A gyakorlatban a célfüggvényekben szereplő $\frac{1}{2}(\mathbf{C}\mathbf{x})^2$, $\frac{1}{2}(\mathbf{y}^T\mathbf{B})^2$ kvadratikus tagok sem ilyen módon vannak megadva, ezt a következő fejezetben részletesen fogjuk tárgyalni.

Végezetül megjegyezzük, hogy ebben a tananyagban a sok bonyolult képlet miatt használni fogjuk a transzponálás jelét.

1. Példa:

Adott a kvadratikus programozási feladat primál feladata. Írjuk fel a duál feladatot!

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5z_1 + z_2 &\geqq 10 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2z_1 + 3z_2 &\geqq -8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0 \\ 7x_1 - 5x_2 + 6x_3 + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)^2 + \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) &\rightarrow \text{min!} \end{aligned}$$

Megoldás:
A feladatban szereplő vektorok és mátrixok az alábbiak:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ezen adatok ismeretében könnyen felírható a duál feladat, amely a következő:

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 - 3w_1 - 2w_2 &\leqq 7 \\ -3y_1 + 4y_2 + w_1 - w_2 &\leqq -5 \\ 4y_1 - y_2 - 4w_1 + 2w_2 &\leqq 6 \\ y_1, y_2 &\geqq 0 \\ 10y_1 - 8y_2 - \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right)^2 - \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) &\rightarrow \text{max!} \end{aligned}$$

2. A kvadratikus programozási feladat célfüggvényének vizsgálata

a) Először vizsgáljuk meg, hogy a primál célfüggvényben szereplő $(\mathbf{Cx})^2$ függvény milyen másodfokú tagokat tartalmaz. A függvény a mátrixműveletek ismeretében az alábbiak szerint írható:

$$(\mathbf{Cx})^2 = (\mathbf{Cx})^T(\mathbf{Cx}) = (\mathbf{x}^T\mathbf{C}^T)(\mathbf{Cx}) = \mathbf{x}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{C})\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}.$$

A duál célfüggvényben szereplő $(\mathbf{y}^T\mathbf{B})^2$ függvény hasonlóan írható fel, azaz $(\mathbf{y}^T\mathbf{B})^2 = \mathbf{y}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{P}\mathbf{y}$.

A $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és a $\mathbf{P} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ szimmetrikus mátrixok együtthatói tartalmazzák a célfüggvényekben a másodfokú tagokat.

2. Példa:
Határozzuk meg az 1. példában szereplő primál és duál feladatnak a célfüggvényében a másodfokú tagokat!

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -6 \\ 8 & -6 & 20 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 26 & -7 \\ -7 & 13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A célfüggvényben szereplő kvadratikus tagok skalárisan a következőképpen írhatók:

$$\begin{aligned}(\mathbf{Cx})^2 &= \mathbf{x}^T\mathbf{Qx} = 13x_1^2 - 2x_1x_2 + 16x_1x_3 + 2x_2^2 - 12x_2x_3 + 20x_3^2, \\ (\mathbf{y}^T\mathbf{B})^2 &= \mathbf{y}^T\mathbf{Py} = 26y_1^2 - 14y_1y_2 + 13y_2^2.\end{aligned}$$

A példa egyben azt is megmutatja, hogyan kell meghatározni a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{P}$ mátrixokat, ha a kvadratikus tagok skaláris alakban vannak megadva.

b) Most vizsgáljuk meg a célfüggvényben szereplő másodfokú függvényt konvexitás szempontjából. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $\mathbf{x}^T\mathbf{Qx}$, ill. az $\mathbf{y}^T\mathbf{Py}$ másodfokú függvények Hesse mátrixa a $\mathbf{Q}$, ill. a $\mathbf{P}$ mátrix.

A konvex függvényekre vonatkozó tételek szerint egy függvény akkor és csak akkor **konvex**, ha Hesse mátrixa **pozitív szemidefinit**. Kvadratikus függvények esetén pedig igaz a következő tétel: egy **kvadratikus függvény** akkor és csak akkor **szigorúan konvex**, ha Hesse mátrixa **pozitív definit**.

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a kvadratikus programozási feladatpárban a másodfokú függvények konvexek. A konvexitáshoz a pozitív szemidefinitséget kell eldönteni, vagyis, hogy $\mathbf{x}^T\mathbf{Qx} \geqq 0$ minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra. Ez pedig igaz, mivel $\mathbf{x}^T\mathbf{Qx} = (\mathbf{Cx})^2 \geqq 0$ és egyenlőség akkor és csak akkor lehetséges, ha $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$. Eddig a $\mathbf{C}$ mátrixot nem vizsgáltuk, most sem kötünk ki róla semmit, hiszen a konvexitás bármilyen $\mathbf{C}$ mátrix esetén fennáll. Ha azonban a $\mathbf{C}$ mátrix teljes rangú, akkor az egyenlőséghez szükséges $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$ csak az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ esetén lehetséges. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{x}^T\mathbf{Qx} > 0$ minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra, ekkor pedig a $\mathbf{Q}$ mátrix pozitív definit, a primál kvadratikus függvény pedig a tétel szerint szigorúan konvex. Ha azonban a $\mathbf{C}$ mátrix nem teljes rangú, akkor $\mathbf{x}^T\mathbf{Qx} \geqq 0$ minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra, tehát a $\mathbf{Q}$ mátrix pozitív szemidefinit, a primál kvadratikus függvény pedig konvex.

Hasonló mondható el a $\mathbf{B}$ mátrixról is. Ha a $\mathbf{B}$ mátrix teljes rangú, akkor a $\mathbf{P}$ mátrix pozitív definit, a duál kvadratikus függvény szigorúan konvex. Ha a $\mathbf{B}$ mátrix nem teljes rangú, akkor a $\mathbf{P}$ mátrix pozitív szemidefinit, a kvadratikus függvény pedig konvex. Ne feledkezzünk el, hogy a duál feladatban a kvadratikus tagok előtt negatv előjel áll, ha ezzel az előjellel tekintjük a kvadratikus függvényt, akkor a definiségnél a pozitív helyett negatív, konvex helyett konkáv szavakat kell használni az állításunkban.

A célfüggvényben szereplő $\mathbf{x}^2$, ill. $\mathbf{z}^2$ kvadratikus függvények szigorúan konvex függvények, amelynek belátását az olvasóra bízzuk. A célfüggvényben lineáris tagok is szerepelnek, ezek akár konvexnek, akár konkávnak is tekinthetők.

Összefoglalva megállapítható, hogy a primál feladat célfüggvénye konvex, a duál feladaté pedig konkáv függvény.

Megjegyezzük, hogy a fentiek miatt az általunk vizsgált kvadratikus programozási feladatpárt **konvex kvadratikus programozási feladatpárnak** is szokás nevezni. A konvexitás az optimalizálásban kulcsfontosságú szerepet tölt be, ismert tétel alapján mondhatjuk, hogy konvex függvény lokális minimuma egyben globális minimum is, vagy konkáv függvény lokális maximuma egyben globális maximuma is. Amennyiben a függvény szigorúan konvex (konkáv), akkor a függvénynek egyetlen globális minimuma (maximuma) van.

c) Végül pedig azt a helyzetet vizsgáljuk, ami a gyakorlatban sokszor előfordul, nevezetesen a másodfokú tagokat az $\frac{1}{2}(\mathbf{Cx})^2$, ill. $\frac{1}{2}(\mathbf{y}^T\mathbf{B})$ helyett egy $\mathbf{Q}$, ill. egy $\mathbf{P}$ mátrix segítségével adják meg az $\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Qx}$, ill. $\frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{Py}$ formában. Ilyen esetben **mindig meg kell győződnünk** a $\mathbf{Q}$, ill. a $\mathbf{P}$ mátrix pozitív szemidefinitségéről, mert csak ebben az esetben mondhatjuk azt, hogy feladatunk konvex kvadratikus programozási feladat. A definitség megállapítására sok módszer ismert. Mi a Gauss módszeren alapuló megoldást választjuk. Eljárásunk az alábbi tételen alapszik:

Ha egy szimmetrikus mátrixon végrehajtott Gauss eliminációs lépések után adódó felső háromszög mátrix főátlójában minden elem pozitív, akkor a mátrix pozitív definit, ha van zérus elem is (negatív nincs) a főátlóban, akkor a mátrix pozitív szemidefinit. Az alábbi tétel szerint pedig a mátrix felbontását is megkaphatjuk:

Egy szimmetrikus $\mathbf{D}$ mátrix akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha felírható

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}^T\mathbf{U}$$

alakban. Egy ilyen felbontás például a Cholesky faktorizáció, amelyben $\mathbf{U}$ felső háromszög mátrix.

A mátrix Cholesky faktorizációját egyszerűen megkaphatjuk a Gauss módszerrel. Azért választottuk a definitség eldöntésére ezt a módszert, mert a faktorizációval kapott mátrixot felhasználva fel is tudjuk írni a kvadratikus programozási feladatok feltételét.

3. Példa:

Állapítsuk meg, hogy az alábbi mátrix pozitív definit-e, ha igen adjuk meg a Cholesky felbontását!

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

A Gauss módszer lépései:

$$\begin{bmatrix} \boxed{4} & 2 & -6 \\ 2 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 0 & \boxed{9} & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Megállapíthatjuk, hogy a mátrix pozitív definit, mert a keletkezett felső háromszög mátrix minden főátlóbeli eleme pozitív. Most a felső háromszög mátrix minden sorát osszuk el a főátlóbeli elem négyzetgyökével, akkor a kapott felső háromszög mátrix (jelölje $\mathbf{U}$) a Cholesky felbontásban a második helyen álló mátrix lesz, az első helyen álló pedig ennek transzponáltja ($\mathbf{U}^T$), azaz $\mathbf{D} = \mathbf{U}^T\mathbf{U}$.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Könnyen belátható , hogy $\mathbf{x}^T\mathbf{D}\mathbf{x} = (\mathbf{U}\mathbf{x})^2$.

4. Példa:

Állapítsuk meg, hogy az alábbi mátrix pozitív szemidefinit-e, ha igen adjuk meg a Cholesky felbontását!

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

A Gauss módszer lépései:

$$\begin{bmatrix} \boxed{4} & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megállapíthatjuk, hogy a mátrix pozitív szemidefinit, mert a keletkezett felső háromszög mátrix főátlóbeli elemei nemnegatívak. A kinullázódott sort egyszerűen elhagyva nyerjük a mátrix felbontását.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Példa:
Adott a kvadratikus programozási feladat primál feladata. Írjuk fel a duál feladatot!

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 5z_1 &\leqq 8 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3z_2 &\geqq 6 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_1^2 - 12x_1x_2 + 20x_2^2 + \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) &\to \min! \end{aligned}$$

Megoldás:
Az első feltételt (-1)-el beszorozzuk és a célfüggvénybeli kvadratikus tagokból $\frac{1}{2}$-et kiemelve azonnal felírhatók a feladat vektorai és mátrixai.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 40 \end{bmatrix}.$$

Konvexitás szempontjából megvizsgáljuk a célfüggvényt, pontosabban eldöntjük, hogy a $\mathbf{Q}$ mátrix pozitív szemidefinit-e.

A Gauss módszer lépései:

$$\begin{bmatrix} \boxed{4} & -12 \\ -12 & 40 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & -12 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

A mátrix pozitív definit, a célfüggvény szigorúan konvex.

Ahhoz, hogy a duál feladat feltételeit felírhassuk, meg kell határozni a $\mathbf{Q}$ mátrix Cholesky felbontását ($\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$), vagyis a $\mathbf{C}$ mátrixot, amelynek segítségével a duál feladat felírható:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A duál feladat célfüggvényének skaláris felírásához pedig a $\mathbf{P} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$ mátrixot is meg kell határozni:

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

A duál feladat:

$$\begin{aligned} -2y_1 + 3y_2 - 2w_1 &\leqq 3 \\ -4y_1 - 5y_2 + 6w_2 - 2w_2 &\leqq 4 \\ y_1, y_2 &\geqq 0 \\ -8y_1 + 6y_2 - \frac{1}{2}(25y_1^2 + 9y_2^2) - \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) &\to \max! \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy ez valójában nem az eredeti feladat duálisa, hiszen az első feltételt beszoroztuk (-1)-el és annak a módosított feladatnak a duálisát kaptuk. Ez a későbbiekben nem okoz gondot, mivel mindig át kell alakítani az eredeti feladatot szimmetrikus formára és annak a duálisát fogjuk majd az algoritmus során megkapni. Ha az olvasót érdekli az eredeti feladat duálisa, akkor azt könnyen megkaphatja, ha ismeri a lineáris programozásban használatos módszert.

3. A kvadratikus programozási feladatpár dualitási problémaköre

3.1. A kvadratikus programozás alaplemmája

A KVADRATIKUS PROGRAMOZÁS ALAPLEMMÁJA:

Ha $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in P$ és $(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \in D$ lehetséges primál és duál megoldások, akkor a célfüggvényértékek között a

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{Cx})^2 + \frac{1}{2}\mathbf{z}^2 \geqq \mathbf{y}^T\mathbf{b} - \frac{1}{2}(\mathbf{y}^T\mathbf{B})^2 - \frac{1}{2}\mathbf{w}^2$$

összefüggés áll fenn, egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^T(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} - \mathbf{b}) &= 0 \\
(\mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T\mathbf{A} + \mathbf{w}^T\mathbf{C})\mathbf{x} &= 0 \\
\mathbf{z}^T &= \mathbf{y}^T\mathbf{B} \\
\mathbf{w} &= \mathbf{Cx}
\end{aligned}$$

Bizonyítás

Induljunk ki a primál célfüggvényből, majd rendre használjuk fel a duál és a primál feltételeket.

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{Cx})^2 + \frac{1}{2}\mathbf{z}^2 &\geqq (\mathbf{y}^T\mathbf{A} - \mathbf{w}^T\mathbf{C})\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{Cx})^2 + \frac{1}{2}\mathbf{z}^2 = \\
&= \mathbf{y}^T\mathbf{Ax} - \mathbf{w}^T\mathbf{Cx} + \frac{1}{2}(\mathbf{Cx})^2 + \frac{1}{2}\mathbf{z}^2 \geqq \\
&\geqq \mathbf{y}^T(\mathbf{b} - \mathbf{Bz}) - \mathbf{w}^T\mathbf{Cx} + \frac{1}{2}(\mathbf{Cx})^2 + \frac{1}{2}\mathbf{z}^2 = \\
&= \mathbf{y}^T\mathbf{b} - \mathbf{y}^T\mathbf{Bz} - \mathbf{w}^T\mathbf{Cx} + \frac{1}{2}(\mathbf{Cx})^2 + \frac{1}{2}\mathbf{z}^2.
\end{aligned}$$

Most a kapott egyenlőtlenség jobboldalához hozzáadva és levonva bizonyos mennyiségeket és rendezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathbf{y}^T\mathbf{b} - \frac{1}{2}(\mathbf{y}^T\mathbf{B})^2 - \frac{1}{2}\mathbf{w}^2 + \frac{1}{2}\left[(\mathbf{Cx})^2 - 2\mathbf{w}^T\mathbf{Cx} + \mathbf{w}^2\right] + \frac{1}{2}\left[(\mathbf{y}^T\mathbf{B})^2 - 2\mathbf{y}^T\mathbf{Bz} + \mathbf{z}^2\right] = \\
&\quad = \mathbf{y}^T\mathbf{b} - \frac{1}{2}(\mathbf{y}^T\mathbf{B})^2 - \frac{1}{2}\mathbf{w}^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{Cx} - \mathbf{w})^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{y}^T\mathbf{B} - \mathbf{z}^T)^2 \geqq \mathbf{y}^T\mathbf{b} - \frac{1}{2}(\mathbf{y}^T\mathbf{B})^2 - \frac{1}{2}\mathbf{w}^2.
\end{aligned}$$

A két oldal egyenlősége pedig akkor és csak akkor állhat fenn, ha a $\geqq$ relációk mindegyike egyenlőséggel teljesül, azaz

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^T(\mathbf{Ax}+\mathbf{Bz}-\mathbf{b}) &= 0\\ (\mathbf{c}^T-\mathbf{y}^T\mathbf{A}+\mathbf{w}^T\mathbf{C})\mathbf{x} &= 0\\ \mathbf{z}^T &= \mathbf{y}^T\mathbf{B}\\ \mathbf{w} &= \mathbf{Cx}\end{aligned}$$

Q.e.d.

A két célfüggvény egyenlőségét biztosító összefüggéseket **egyensúlyi feltételeknek** nevezzük.

3.2. A kvadratikus programozás alaplemmájának következménye

KVADRATIKUS PROGRAMOZÁS ALAPLEMMÁJÁNAK KÖVETKEZMÉNYE:

Ha valamely $(\mathbf{x}^*,\mathbf{z}^*)\in P$ és $(\mathbf{y}^*,\mathbf{w}^*)\in D$ esetén a két célfüggvényérték megegyezik, azaz

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^*+\frac{1}{2}(\mathbf{Cx}^*)^2+\frac{1}{2}\mathbf{z}^{*2}=\mathbf{y}^{*T}\mathbf{b}-\frac{1}{2}(\mathbf{y}^{*T}\mathbf{B})^2-\frac{1}{2}\mathbf{w}^{*2},$$

akkor az $(\mathbf{x}^*,\mathbf{z}^*)\in P$ és $(\mathbf{y}^*,\mathbf{w}^*)\in D$ lehetséges megoldások optimálisak.

Bizonyítás

Legyen $(\mathbf{x},\mathbf{z})\in P$ tetszőleges, ekkor az alaplemma szerint az $(\mathbf{x},\mathbf{z})\in P$ és $(\mathbf{y}^*,\mathbf{w}^*)\in D$ lehetséges megoldásokra írható, hogy

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}+\frac{1}{2}(\mathbf{Cx})^2+\frac{1}{2}\mathbf{z}\geqq\mathbf{y}^{*T}\mathbf{b}-\frac{1}{2}(\mathbf{y}^{*T}\mathbf{B})^2-\frac{1}{2}\mathbf{w}^{*2},$$

a két célfüggvényérték egyezése miatt pedig az alábbi írható:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}+\frac{1}{2}(\mathbf{Cx})^2+\frac{1}{2}\mathbf{z}^2\geqq\mathbf{c}^T\mathbf{x}^*+\frac{1}{2}(\mathbf{Cx}^*)^2+\frac{1}{2}\mathbf{z}^{*2}\quad \text{minden } (\mathbf{x},\mathbf{z})\in P \text{ esetén},$$

ami az $(\mathbf{x}^*,\mathbf{z}^*)$ optimalitását mutatja. Az $(\mathbf{y}^*,\mathbf{w}^*)$ optimalitásának igazolása hasonlóan történik, ennek elvégzését az olvasóra bízzuk. **Q.e.d.**

3.3. A kvadratikus programozás dualitási tétele

A KVADRATIKUS PROGRAMOZÁS DUALITÁSI TÉTELE:

Az alábbi két állítás közül egyik és csakis egyik teljesül:

(a) Vagy a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása, vagy a duál feladatnak nincs lehetséges megoldása, vagy egyiknek sincs lehetséges megoldása.

(b) Létezik olyan $(\mathbf{x}^*,\mathbf{z}^*)\in P$ primál lehetséges megoldás és $(\mathbf{y}^*,\mathbf{w}^*)\in D$ duál lehetséges megoldása, hogy a két célfüggvény értéke megegyezik, azaz létezik optimális megoldáspár és a két célfüggvény optimális értéke megegyezik.

4. A kvadratikus programozási feladat KKT feladata

Ahhoz, hogy a kvadratikus programozási feladatpár optimális megoldását megkapjuk, olyan $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in P$ és $(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \in D$ lehetséges primál és duál megoldásokat kell keresni, amelyek az egyensúlyi feltételeket kielégítik (ekkor azonos a két célfüggvény értéke), azaz az alábbi rendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} &\geqq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} P$$
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{y}^T\mathbf{A} - \mathbf{w}^T\mathbf{C} &\leqq \mathbf{c}^T \\ \mathbf{y} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} D$$
$$\left.\begin{gathered} \mathbf{y}^T(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} - \mathbf{b}) = 0 \\ (\mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T\mathbf{A} + \mathbf{w}^T\mathbf{C})\mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{z}^T = \mathbf{y}^T\mathbf{B} \\ \mathbf{w} = \mathbf{Cx} \end{gathered}\right\} E$$

A rendszer megoldásához először helyettesítsük be az egyensúlyi feltételek közül az utolsó kettőt a többibe, így a rendszerben már csak az $\mathbf{x}$ és az $\mathbf{y}$ változók szerepelnek.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{Ax} + \mathbf{BB}^T\mathbf{y} &\geqq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} P$$
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{y}^T\mathbf{A} - \mathbf{x}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C} &\leqq \mathbf{c}^T \\ \mathbf{y} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} D$$
$$\left.\begin{gathered} \mathbf{y}^T(\mathbf{Ax} + \mathbf{BB}^T\mathbf{y} - \mathbf{b}) = 0 \\ (\mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T\mathbf{A} + \mathbf{x}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C})\mathbf{x} = 0 \end{gathered}\right\} E$$

Most használjuk a már bevezetett $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ és $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixokat, amelyek:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{BB}^T \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{C}^T\mathbf{C} \end{aligned}$$

Továbbá vezessük be a primál, ill. duál feltételeknél az $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$, ill. az $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ nemnegatív hiányváltozókat, ekkor a fenti rendszer az alábbi egyszerűbb formában írható:

$$\left.\begin{aligned} -\mathbf{Py} - \mathbf{Ax} + \bar{\mathbf{y}} &= -\mathbf{b} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{Qx} + \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{c} \end{aligned}\right\} ER$$
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} NN$$
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}^T\bar{\mathbf{x}} &= 0 \\ \mathbf{y}^T\bar{\mathbf{y}} &= 0 \end{aligned}\right\} OR$$

A megoldandó rendszer tehát egyenletrendszerből (ER), a változókra vonatkozó nemnegativitási feltételekből (NN) és ortogonalitási (komplementaritási) feltételekből (OR) áll. Ezek a kategóriák az algoritmusok kidolgozásában fontos szerepet fognak játszani.

A fenti megoldandó rendszer nem más mint a kvadratikus programozási primál feladat Karush-Kuhn-Tucker (KKT) feltételi rendszere. Ezt a feladatot **KKT feladatnak** is nevezik. A következőkben a KKT feladat levezetésével foglalkozunk. A megoldandó optimalizálási feladat a szokásos formában az alábbbi

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{Cx})^2 + \frac{1}{2}\mathbf{z}^2 \to \min! \\ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{b} - \mathbf{Ax} - \mathbf{Bz} \leqq \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) &= -\mathbf{x} \leqq \mathbf{0} \end{aligned}$$

A feladat Lagrange függvény az alábbi

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{Cx})^2 + \frac{1}{2}\mathbf{z}^2 + \mathbf{y}^T(\mathbf{b} - \mathbf{Ax} - \mathbf{Bz}) + \bar{\mathbf{x}}^T(-\mathbf{x}),$$

ahol a $\mathbf{g}_1$ típusú feltételekhez tartozó Lagrange szorzókat az $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ vektorba, a $\mathbf{g}_2$ feltételekhez tartozókat pedig az $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ vektorba foglaltuk. Határozzuk meg a Lagrange függvénynek az $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$ primál változók szerinti gradiensét, ezek a következők

$$\begin{aligned} \nabla L_{\mathbf{x}} &= \mathbf{c} + \mathbf{C}^T\mathbf{Cx} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}} \\ \nabla L_{\mathbf{z}} &= \mathbf{z} - \mathbf{B}^T\mathbf{y} \end{aligned}$$

Ezekután írjuk fel a KKT feltételeket, amelyek mint ismeretes a $\nabla L_{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, $\nabla L_{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$, a komplementaritási és a primál feltételekből áll, azaz:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} + \mathbf{C}^T\mathbf{Cx} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{z} - \mathbf{B}^T\mathbf{y} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{y} &\geqq \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{x}} &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}^T(\mathbf{b} - \mathbf{Ax} - \mathbf{Bz}) &= 0 \\ \bar{\mathbf{x}}^T(-\mathbf{x}) &= 0 \\ \mathbf{b} - \mathbf{Ax} - \mathbf{Bz} &\leqq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Bevezetve az $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$ nemnegatív hiányváltozót a primál feltételbe, elvégezve a $\mathbf{z} = \mathbf{B}^T\mathbf{y}$ helyettesítést, valamint bevezetve a megismert $\mathbf{P} = \mathbf{BB}^T$, $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$ szimmetrikus mátrixokat, az alábbi rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} -\mathbf{Py} - \mathbf{Ax} + \bar{\mathbf{y}} &= -\mathbf{b} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{Qx} + \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{c} \\ \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y} &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}^T\bar{\mathbf{y}} &= 0 \\ \bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} &= 0 \end{aligned}$$

amely megegyezik az előző részben (más megfontolásból) levezetett rendszerrel.

A fenti rendszer tömörebb (átláthatóbb formában) is megfogalmazható. Vezessük be az $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}$ mátrixot és a $\mathbf{q}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{(m+n)}$ vektorokat a következő módon:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\mathbf{P} & -\mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & -\mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}} \\ \bar{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}.$$

Ekkor a KKT feladat az alábbi módon írható fel:

$$\begin{aligned} \mathbf{Mv} + \mathbf{u} &= \mathbf{q} \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{u}^T\mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

Az ilyen típusú feladatot a szakirodalom **lineáris komplementaritási feladatnak** nevezi. A kvadratikus programozás KKT feladata tehát egy lineáris komplementaritási feladat, amelyben az $\mathbf{M}$ mátrix speciális szerkezetű. Az ilyen szerkezetű mátrixot **biszimmetrikus mátrixnak** nevezzük. Az $\mathbf{M}$ biszimmetrikus mátrix főátlója mentén két **szimmetrikus negatív szemidefinit** mátrix $(-\mathbf{P}, -\mathbf{Q})$ van, a mellékátló mentén pedig **ferdén szimmetrikus**, amelyben az $\mathbf{A}$ mátrix tetszőleges. Biszimmetrikus mátrixnak nevezzük azt a mátrixot is, amelynek főátlója mentén két szimmetrikus pozitív szemidefinit mátrix van, a mellékátló mentén pedig ferdén szimmetrikus.

Biszimmetrikus mátrixokra igaz az alábbi állítás: Egy biszimmetrikus mátrix, amelynek főátlóbeli szimmetrikus blokkjai pozitív, ill. negatív szemidefinit mátrixok, bármely $\mathbf{A}$ mátrix esetén pozitív, ill. negatív szemidefinit mátrix.

5. A kvadratikus programozási feladat megoldási módszerei

A kvadratikus programozási feladat megoldásához a KKT rendszert, ill. a lineáris komplementaritási feladatot kell megoldani. Erre számos módszert ismerünk, mi két eljárást mutatunk be, az egyik a Lemke módszer, a másik pedig a criss-cross módszer. A módszerek abban különböznek egymástól, hogy az ER, NN, OR feltételek közül melyek teljesednek az algoritmus minden lépésében.

5.1. Lemke módszer

A Lemke módszerben az ER, NN, OR feltételeket kielégítő rendszer megoldására vezessünk be egy $\lambda \geqq 0$ nemnegatív **segédváltozót** úgy, hogy vonjuk ki mindegyik egyenlet baloldalából, ezzel az alábbi rendszer kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} -\mathbf{Py} - \mathbf{Ax} + \bar{\mathbf{y}} - \lambda \mathbf{e}_m &= -\mathbf{b} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{Qx} + \bar{\mathbf{x}} - \lambda \mathbf{e}_n &= \mathbf{c} \end{aligned}\right\} UER$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}} &\geqq \mathbf{0} \\ \lambda &\geqq 0 \end{aligned}\right\} NN$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}^T\bar{\mathbf{x}} &= 0 \\ \mathbf{y}^T\bar{\mathbf{y}} &= 0 \end{aligned}\right\} OR$$

ahol $\mathbf{e}_m$ és $\mathbf{e}_n$ vektorok m, ill. n dimenziós, csupa egyesekből álló vektorok. Tehát a feladatunk az UER egyenletrendszer olyan nemnegatív megoldásának a megkeresése, amelyre az ortogonalitási (komplementaritási) megkötés is teljesül. Amennyiben a megoldásnál $\lambda = 0$ adódik, úgy az a KKT feladat megoldása is. A konvexitás miatt ez a megoldás a kvadratikus programozási feladatpár optimális megoldása is. Az UER egyenletrendszer megoldását pivotálással végezzük, ügyelve a nemnegativitási és az ortogonanitási feltételekre. A Lemke algoritmus tehát olyan tulajdonságú, hogy minden lépésben teljesítjük a KKT feladat NN nemnegativitási és OR ortogonalitási feltételeit.

A megoldási algoritmus
Kiinduló lépés:

Induláshoz az UER egyenletrendszer egy nemnegatív bázismegoldását határozzuk meg. Az $\bar{\mathbf{y}}$, $\bar{\mathbf{x}}$ változók bázisba hozásával egy induló bázist határozhatunk meg, ez teljesíti a OR ortogonalitási feltételt, de nem teljesíti az NN nemnegativitási követelményt, viszont nagyon egyszerűen elérhetjük, hogy a nemnegativitás is teljesedjen. Az induló bázisbábla sémája (rövid táblát használva) az alábbi:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} & \mathbf{y} & \mathbf{x} & \lambda & \\ \hline \bar{\mathbf{y}} & -\mathbf{P} & -\mathbf{A} & \begin{matrix}-1\\ \vdots\\ -1\end{matrix} & -\mathbf{b} \\ \hline \bar{\mathbf{x}} & \mathbf{A}^T & -\mathbf{Q} & \begin{matrix}-1\\ \vdots\\ -1\end{matrix} & \mathbf{c} \\ \hline \end{array}$$

A fenti bázistáblát megengedetté, azaz csak nemnegatív bázismegoldást tartalmazó táblává tehetjük egyetlen pivotálással, a λ változó bázisba vitelével. Egyszerűen belátható, hogy csak olyan sorban választhatunk pivotelemet (-1-et), ahol a megoldásoszlopban (utolsó oszlop) negatív elem van, ezen sorok közül pedig azt kell kiválasztani, amelyben a megoldásoszlopbeli negatív elem a legkisebb. Így garantáltan nemnegatív bázistáblát kapunk és az ortogonalitás sem romlik el. Ezek igazolását az olvasóra bízzuk.

Közbülső lépés:

A kiindulástól kezdve minden lépésben az elvégzendő feladatok azonos szerkezetűek, amelyeket 3 részlépésben közlünk.

1. részlépés: A bázisba bejövő változó meghatározása

Az OR **ortogonalitási feltétel** figyelembevételével határozzuk meg a **bejövő változót**. Az előző lépés 2. részlépéséből tudjuk, hogy melyik változó **ment ki** a bázisból (induláskor a kiinduló lépésből). A **bejövő változót** úgy választjuk, hogy az OR feltétel teljesüljön, azaz, ha $\bar{x}_j$ ment ki a bázisból, akkor x_j jön be a bázisba, ha pedig ha $\bar{y}_j$ ment ki a bázisból, akkor y_j jön be a bázisba, ill. fordítva.

2. részlépés: A bázisból kimenő változó meghatározása

A változók NN **nemnegativitási feltételének** figyelembevételével határozzuk meg a **kimenő változót**. A pivotálásnál a nemnegatív bázistábla nemnegativitása nem romlik el, ha a szimplex módszernél megismert hányados szabályt alkalmazzuk. Tehát, ha az első részlépés szerint az s-edik oszlopban kell pivotelemet választani, akkor ebben az oszlopban azt a **pozitív elemet** válasszuk, amelynél a megoldásbeli és az s-edik oszlopbeli elemekre vonatkozó **hányados minimális**.

3. részlépés: A pivotálás végrehajtása

Az első és második részlépésben választott helyen lévő pivotelemmel elvégezzük a pivotálást.

Megjegyzések az algoritmushoz:

a) Ha valamely lépésben a **bázisban lévő** λ segédváltozó értéke **zérus**, akkor befejezzük az eljárást, mivel a KKT feladat minden feltétele teljesül, így a kvadratikus programozási feladatpár optimális megoldása a bázistábláról leolvasható.

b) Ha a 2. részlépésben a λ **segédváltozót kell kivinni** a bázisból, akkor a pivotálás elvégzése után befejezzük az eljárást, hasonlóan az előző megjegyzéshez ekkor is teljesül a KKT feladat minden feltétele ($\lambda = 0$), így a kvadratikus programozási feladatpár optimális megoldása a bázistábláról leolvasható.

c) Ha a 2. részlépésben **nem tudunk kimenő változót** választani (minden elem a kiválasztott oszlopban nempozitív), akkor vagy a primál vagy a duál kvadratikus programozási feladatnak nincs lehetséges megoldása, így természetesen optimális megoldása sincs.

A következőkben bemutatunk egy példát a Lemke algoritmusra.

6. Példa:

Adott az alábbi kvadratikus programozási feladat. Állapítsuk meg, hogy konvex feladatról van-e szó! Írjuk fel a feladat duálisát, majd oldjuk meg a feladatpárt Lemke módszerrel!

$$\begin{aligned} 2t_1 + t_2 &\leqq 20 \\ 3t_1 + 4t_2 &\leqq 40 \\ t_1, t_2 &\geqq 0 \\ t_1^2 + t_2^2 - 6t_1 - 8t_2 &\rightarrow \text{min!} \end{aligned}$$

Megoldás:

A feladat formailag sem a primál feladattal, sem a duál feladattal nem egyezik, ezért írjuk át például a primál feladatra. Az átírt formában a megszokott változóneveket használjuk, így t helyett az x változókat.

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 &\geqq -20 \\ -3x_1 - 4x_2 &\geqq -40 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \\ -6x_1 - 8x_2 + \frac{1}{2}(2x_1^2 + 2x_2^2) &\rightarrow \text{min!} \end{aligned}$$

Ebből már megállapíthatjuk a modellben szereplő vektorokat és mátrixokat, ezek az alábbiak:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -20 \\ -40 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{B}$ mátrix zérus mátrix, így a $\mathbf{P}$ mátrix is az. A $\mathbf{Q}$ mátrix diagonális mátrix és a főátlójában minden elem pozitív, így a $\mathbf{Q}$ pozitív definit mátrix. Eszerint a szóbanforgó feladat konvex kvadratikus programozási feladat. A duál feladat felírásához el kell végezni a $\mathbf{Q}$ mátrix Cholesky felbontását ($\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$), amelyből a $\mathbf{C}$ mátrix a következő:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

A primál feladat duál feladata:

$$
\begin{array}{rcl}
-2y_1 - 3y_2 - \sqrt{2}w_1 \qquad\qquad & \leqq & -6 \\
-y_1 - 4y_2 \qquad\qquad - \sqrt{2}w_2 & \leqq & -8 \\
y_1, y_2 & \geqq & 0 \\
-20y_1 - 40y_2 - \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) & \to & \max!
\end{array}
$$

Megjegyezzük, hogy ez nem az eredeti feladat duál feladata, azt is felírhatnánk, csupán egy kis rendezést kell elvégezni.

A Lemke módszerrel történő megoldás lépései a következők:
Kiinduló bázistáblázat:

	y_1	y_2	x_1	x_2	λ	
$\bar{y}_1$	0	0	2	1	-1	20
$\bar{y}_2$	0	0	3	4	-1	40
$\bar{x}_1$	-2	-3	-2	0	-1	-6
$\bar{x}_2$	-1	-4	0	-2	$\boxed{-1}$	-8

A λ oszlopában a legkisebb negatív szám a -8, így ennek sorában választunk pivotelemet. A pivotálás elvégzése utáni bázistáblázat:

	y_1	y_2	x_1	x_2	$\bar{x}_2$	
$\bar{y}_1$	1	4	2	3	-1	28
$\bar{y}_2$	0	0	3	6	-1	48
$\bar{x}_1$	-1	1	-2	$\boxed{2}$	-1	2
λ	1	4	0	2	-1	8

Mivel az $\bar{x}_2$ változó ment ki a bázisból, így az x_2 bejöhet a bázisba, mert ekkor az ortogonalitás nem romlik el. Az x_2 oszlopában pedig a szimplex módszer hányados kritériumával választunk pivotelemet. Az újabb bázistáblázat:

	y_1	y_2	x_1	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	
$\bar{y}_1$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	5	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	25
$\bar{y}_2$	4	1	9	-3	2	42
x_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
λ	2	3	$\boxed{2}$	-1	0	6

Mivel az $\bar{x}_1$ változó ment ki a bázisból, így az x_1 bejöhet a bázisba, hiszen ekkor az ortogonalitás nem romlik el. Az x_1 oszlopában a szimplex módszer hányados kritériumával választva pivotelemet és elvégezve a pivotálást, az újabb bázistáblázat:

	y_1	y_2	λ	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	
$\bar{y}_1$	$-\frac{5}{2}$	-5	$-\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	10
$\bar{y}_2$	-5	$-\frac{25}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	15
x_2	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	4
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	3

Vége az algoritmusnak, mert olyan bázistábla, ill. megoldás adódott, amelyben $\lambda = 0$.

A primál feladat optimális megoldása: $x_1 = 3,\ x_2 = 4,$ a célfüggvény minimális értéke: -25.

A duál feladat optimális megoldása: $y_1 = 0,\ y_2 = 0$. A w_1, w_2 duálváltozók értéke pedig a $\mathbf{w} = \mathbf{Cx}$ összefüggésből számítható, azaz $w_1 = 3\sqrt{2},\ \ w_2 = 4\sqrt{2}$. A célfüggvény maximális értéke: -25.

Az eredeti feladat t_1, t_2 változóira a megoldás: $t_1 = 3,\ t_2 = 4$.

A szigorú konvexitás miatt ez az egyedüli optimális megoldás.

Feladat:

Oldja meg a 6. példa feladatát úgy, hogy a feladatot a duál feladat alakjára írja át!

5.2. Criss-cross módszer

A criss-cross algoritmus minden lépésében teljesítjük a KKT feladat ER egyenletrendszerét és az OR ortogonalitási feltételeit.

A megoldási algoritmus

Kiinduló lépés:

Induláshoz az ER egyenletrendszer egy nemnegatív bázismegoldását határozzuk meg. Az $\bar{\mathbf{y}}$, $\bar{\mathbf{x}}$ változók bázisba hozásával egy induló bázist határozhatunk meg, ez ugyan még nem teljesíti az NN nemnegativitási követelményt, viszont teljesíti az OR ortogonalitási követelményt. Az induló bázistábla az alábbi:

	$\mathbf{y}$	$\mathbf{x}$	
$\bar{\mathbf{y}}$	$-\mathbf{P}$	$-\mathbf{A}$	$-\mathbf{b}$
$\bar{\mathbf{x}}$	$\mathbf{A}^T$	$-\mathbf{Q}$	$\mathbf{c}$

Az induló bázistábla megoldásoszlop nélküli része biszimmetrikus mátrix. Mint ismeretes a biszimmetrikus mátrix jellegzetessége, hogy a főátlón két szimmetrikus, negatív szemidefinit mátrix ($-\mathbf{P}$, $-\mathbf{Q}$) van, a többi elemében ($-\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T$) pedig ferdén szimmetrikus.

A továbbiakban a szimmetrikus blokkokat $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ típusú blokkoknak, a ferdén szimmetrikus blokkokat $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^T$ típusú blokkoknak nevezzük, tehát az elnevezésekben nem használjuk az előjelet, az elnevezésekkel csak a blokk helyére utalunk.

Közbülső lépés:

A kiindulástól kezdve minden lépésben **principális pivotálást** vagy **kettős pivotálást** hajtunk végre.

1. Amennyiben a megoldásoszlopban nincs negatív szám, úgy megállunk, mert olyan megoldást találtunk, amely teljesíti a ER, OR, NN követelmények mindegyikét.

2. Ha a megoldásoszlopban van negatív szám, akkor válasszuk azt a sort, amelyikben a megoldásoszlopban negatív szám áll és a változó indexe a legkisebb. Ennek érdekében az összes változót 1-től $2(m+n)$-ig sorszámozni kell és ezt tekintjük a legkisebb index meghatározásához szükséges indexnek. Attól függően, hogy a kiválasztott sorhoz a $\mathbf{P}$ vagy $\mathbf{Q}$ típusú blokk tartozik, az a), ill. b) lépéseket végezzük el.

(a) Tegyük fel, hogy a kiválasztott sorhoz a $\mathbf{P}$ típusú blokk tartozik. Tekintsük a $\mathbf{P}$ típusú blokk kiválasztott sorbeli főátlójában álló számot. Ez a szám a negatív szemidefinitség miatt nem lehet pozitív.
Ha a főátlóbeli elem negatív, akkor ezzel az elemmel elvégzünk egy ún. **principális pivotálást**.
Ha a főátlóbeli elem zérus, akkor a negatív szemidefinitség miatt a $\mathbf{P}$ típusú blokk ezen sorának minden eleme is zérus. Most tekintsük az $\mathbf{A}$ típusú blokkban a kiválasztott sorbeli elemeket és válasszuk azt az oszlopot, amelyikben negatív szám áll és a változó indexe a legkisebb. Ha van ilyen, akkor végezzünk el egy ún. **kettős pivotálást**, azaz először a kiválasztott sor és oszlop találkozásában álló pivotelemmel végezzünk el egy pivotálást, majd ennek a helynek a főátlóra vett tükörhelyén lévő pivotelemmel ($\mathbf{A}^T$ típusú blokkban) is végezzünk el egy pivotálást. Ha az $\mathbf{A}$ típusú blokkban a kiválasztott sorbeli elemek között nincs negatív, akkor megállunk, mert a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása.

(b) Tegyük fel, hogy a kiválasztott sorhoz a $\mathbf{Q}$ típusú blokk tartozik. Tekintsük a $\mathbf{Q}$ típusú blokk kiválasztott sorbeli főátlójában álló számot. Ez a szám a negatív szemidefinitség miatt nem lehet pozitív.
Ha a főátlóbeli elem negatív, akkor ezzel az elemmel elvégzünk egy principális pivotálást.
Ha a főátlóbeli elem zérus, akkor a negatív szemidefinitség miatt a $\mathbf{Q}$ típusú blokk ezen sorának minden eleme is zérus. Most tekintsük az $\mathbf{A}^T$ típusú blokkban a kiválasztott sorbeli elemeket és válasszuk azt az oszlopot, amelyikben negatív szám áll és a változó indexe a legkisebb. Ha van ilyen, akkor végezzünk el egy kettős pivotálást, azaz először a kiválasztott sor és oszlop találkozásában álló pivotelemmel végezzünk el egy pivotálást, majd ennek a helynek a főátlóra vett tükörhelyén ($\mathbf{A}$ típusú blokkban) is végezzünk el egy pivotálást. Ha az $\mathbf{A}^T$ típusú blokkban a kiválasztott sorbeli elemek között nincs negatív, akkor megállunk, mert a duál feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Megjegyzések az algoritmushoz:
a) Ha principális pivotálást hajtunk végre, akkor a pivotálás után a tábla újra biszimmetrikus marad. Ha a $\mathbf{P}$ típusú blokk fóátlójában történt a pivotelem kiválasztása, akkor ennek a szimmetrikus blokknak a mérete eggyel csökken, a $\mathbf{Q}$ típusú szimmetrikus blokknak a mérete pedig eggyel növekszik. Ha a $\mathbf{Q}$ típusú blokk fóátlójában történt a pivotelem kiválasztása, akkor ennek a szimmetrikus blokknak a mérete eggyel csökken, a $\mathbf{P}$ típusú szimmetrikus blokknak a mérete pedig eggyel növekszik. Tehát a principális pivotálás után a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ típusú blokkok mérete változik.
b) Ha kettős pivotálást hajtunk végre, akkor a pivotálás után a tábla újra biszimmetrikus marad, a blokkok méretei változatlanok lesznek.

A következőkben bemutatunk néhány példát a criss-cross algoritmusra.

7. Példa:
Adott az alábbi kvadratikus programozási feladat. Állapítsuk meg, hogy konvex feladatról van-e szó! Írjuk fel a feladat duálisát, majd oldjuk meg a feladatpárt criss-cross

módszerrel!

$$\begin{array}{rcl} -t_1 + t_2 & \leqq & 6 \\ 2t_1 + 3t_2 & \leqq & 50 \\ t_1, t_2 & \geqq & 0 \\ -3t_1 + 2t_2 - 2t_1^2 + 2t_1t_2 - \frac{1}{2}t_2^2 & \rightarrow & \max! \end{array}$$

Megoldás:

A feladat formailag a duálfeladattal egyezik, az eddigi jelöléseknél maradva a t változó helyett a megszokott y változót használjuk. Javasoljuk az olvasónak a primál feladatra történő átírást és megoldást. A modellben szereplő vektorok és mátrixok az alábbiak:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ 50 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{C}$ mátrix zérus mátrix, így a $\mathbf{Q}$ mátrix is az. A feladat konvex kvadratikus programozási feladat, mert a $\mathbf{P}$ mátrix pozitív szemidefinit, ennek megállapítását és a $\mathbf{P}$ mátrix $\mathbf{P} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$ felbontását az alábbiakban végezzük el.

$$\begin{bmatrix} \boxed{4} & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A duál alakú feladathoz tartozó primál alakú feladat:

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 + 2z & \geqq & -3 \\ x_1 + 3x_2 - z & \geqq & 2 \\ x_1, x_2 & \geqq & 0 \\ 6x_1 + 50x_2 + \frac{1}{2}z^2 & \rightarrow & \max! \end{array}$$

Megjegyezzük, hogy ez nem az eredeti feladat duál feladata, azt is felírhatnánk, csupán egy kis rendezést kell elvégezni.

A criss-cross módszerrel történő megoldás lépései a következők:
Kiinduló bázistáblázat:

	y_1	y_2	x_1	x_2	
$\bar{y}_1$	-4	2	1	-2	3
$\bar{y}_2$	2	$\boxed{-1}$	-1	-3	-2
$\bar{x}_1$	-1	1	0	0	6
$\bar{x}_2$	2	3	0	0	50

Ahhoz, hogy a legkisebb index kiválasztási elvet alkalmazhassuk a példában szereplő nyolc változót sorba kell rendezni. A sorrendbe állításnak nincs kritériuma, viszont minden lépésben ez a sorrend fogja eldönteni a legkisebb indexet. Legyen a sorrend $y_1, y_2, x_1, x_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2$.

A megoldásoszlopban van negatív szám és egyetlen egy van (az index szabálynak most nincs értelme), a kiválasztott sor az $\bar{y}_2$ változó sora. A $\mathbf{P}$ típusú blokk főátlójában lévő elem

-1 és ez negatív, principális pivotálást kell elvégezni ezzel a pivotelemmel. A principális pivotálás elvégzése utáni bázistáblázat:

	y_1	$\bar{y}_2$	x_1	x_2	
$\bar{y}_1$	0	2	$\boxed{-1}$	-8	-1
y_2	-2	-1	1	3	2
$\bar{x}_1$	1	1	-1	-3	4
$\bar{x}_2$	8	3	-3	-9	44

Figyeljük meg, hogy a principális pivotálás után a blokkok új mérete a következő: a $\mathbf{P}$ típusú blokké 1×1, a $\mathbf{Q}$ típusú blokké 3×3, az $\mathbf{A}$ típusú blokké 1×3, az $\mathbf{A}^T$ típusú blokké pedig 3×1. A tábla biszimmetrikus maradt és az ortogonalitás sem romlott el. Javasoljuk az olvasónak, hogy ellenőrizze le a $\mathbf{Q}$ típusú blokk negatív szemidefinitségét.

A megoldásoszlopban van negatív szám és egyetlen egy van, a kiválasztott sor az $\bar{y}_1$ változó sora. A $\mathbf{P}$ típusú blokk főátlójában lévő elem 0, ezért kettős pivotálást kell végezni. Az $\mathbf{A}$ típusú blokkban kell tekinteni az $\bar{y}_1$ sorbeli elemeket: $(2, -1, -8)$. Kettő negatív elem is van, most használni kell a legkisebb index szabályt. A két változó (x_1, x_2) közül a legkisebb indexe az x_1 változónak van. (A legkisebb indexet sorrend alapján választottuk ki, példánkban most egybeesett a sorrendbeli és a valóságos legkisebb index.) Az $\bar{y}_1$ és x_1 cseréjével elvégezzük az első pivotálást, majd a tükörhelyen az $\bar{x}_1$ és y_1 cseréjével elvégezzük a második pivotálást. A kettős pivotálás elvégzése utáni bázistáblázat:

	y_1	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_1$	x_2	
x_1	0	-2	-1	8	1
y_2	-2	1	1	-5	1
$\bar{x}_1$	$\boxed{1}$	-1	-1	5	5
$\bar{x}_2$	8	-3	-3	15	47

	$\bar{x}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_1$	x_2	
x_1	0	-2	-1	8	1
y_2	2	-1	-1	5	11
y_1	1	-1	-1	5	5
$\bar{x}_2$	-8	5	5	-25	7

Figyeljük meg, hogy a kettős pivotálás után a blokkok mérete nem változott, a tábla biszimmetrikus maradt és az ortogonalitás sem romlott el. Javasoljuk az olvasónak, hogy most is ellenőrizze le a $\mathbf{Q}$ típusú blokk negatív szemidefinitségét.

Vége az algoritmusnak, mert a megoldásoszlopban nincs negatív elem, a bázistáblázatból kiolvashatók a megoldások.

A duál feladat optimális megoldása: $y_1 = 5$, $y_2 = 11$, a célfüggvény maximális értéke: 6.5 .

A primál feladat optimális megoldása: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. A z primálváltozó értéke pedig a $\mathbf{z} = \mathbf{B}^T\mathbf{y}$ összefüggésből számítható, azaz $z = -1$. A célfüggvény minimális értéke: -6.5.

Feladatok:

a) Oldja meg a 7. példa feladatát úgy, hogy a feladatot a primál feladat alakjára írja át!

b) Oldja meg a 7. példát Lemke módszerrel!

c) Oldja meg a 6. példát criss-cross módszerrel!

8. Példa:

Adott az alábbi kvadratikus programozási feladat. Állapítsuk meg, hogy konvex feladatról van-e szó! Írjuk fel a feladat duálisát, majd oldjuk meg a feladatpárt criss-cross módszerrel!

$$\begin{aligned} 2t_1 + \quad t_2 + r_1 - r_2 &\leqq 20 \\ t_1 + 4t_2 - r_1 + r_2 &\geqq 40 \\ t_1, t_2 &\geqq 0 \\ 5t_1 + 70t_2 + \frac{1}{2}t_1^2 + t_1t_2 + 2t_2^2 + \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) &\rightarrow \text{min!} \end{aligned}$$

Megoldás:
A feladat formailag a primál feladathoz hasonlít leginkább, ezért írjuk át a primál feladatra.

$$\begin{aligned} -2x_1 - \quad x_2 - z_1 + z_2 &\geqq -20 \\ x_1 + 4x_2 - z_1 + z_2 &\geqq 40 \\ t_1, t_2 &\geqq 0 \\ 5x_1 + 70x_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2) + \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) &\rightarrow \text{min!} \end{aligned}$$

Ebből már megállapíthatjuk a modellben szereplő vektorokat és mátrixokat, ezek az alábbiak

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -20 \\ 40 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 70 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{Q}$ mátrix pozitív definit, így konvex kvadratikus programozási feladatról van szó. A számításhoz szükséges $\mathbf{P}$ mátrixot a $\mathbf{P} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$ összefüggéssel számíthatjuk ki, amely

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ha a duál feladatot is fel akarjuk írni, akkor a $\mathbf{Q}$ mátrix felbontását ($\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$) el kell végezni, amely

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

A primál feladat duál feladata:

$$\begin{aligned} -2y_1 + \quad y_2 - w_1 \qquad &\leqq 5 \\ -y_1 + 4y_2 - w_1 - \sqrt{3}w_2 &\leqq 70 \\ y_1, y_2 &\geqq 0 \\ -20y_1 + 40y_2 - \frac{1}{2}(2y_1^2 + 4y_1y_2 + 2y_2^2) - \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) &\rightarrow \text{max!} \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy ez nem az eredeti feladat duál feladata, ahhoz egy kis rendezés kell.

A feladatot criss-cross módszerrel oldjuk meg, az ehhez szükséges induló táblát valamint az optimális táblát az alábbiakban közöljük:

	y_1	y_2	x_1	x_2	
$\bar{y}_1$	-2	-2	2	1	20
$\bar{y}_2$	-2	-2	-1	-4	-40
$\bar{x}_1$	-2	1	-1	-1	5
$\bar{x}_2$	-1	4	-1	-4	70

	y_1	$\bar{y}_2$	$\bar{x}_1$	x_2	
$\bar{y}_1$	-6	0	2	-1	30
y_2	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	15
x_1	2	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2	10
$\bar{x}_2$	1	1	-2	-6	20

Az optimális táblázatból leolvasható megoldások:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{z}$ és a $\mathbf{w}$ megoldások pedig az alábbiak:

$$\mathbf{z} = \mathbf{B}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -15 \\ 15 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A közös optimális célfüggvényérték: 325.

Feladatok:
a) Oldja meg a 8. példa feladatát úgy, hogy a feladatot a duál feladat alakjára írja át!
b) Oldja meg az 8. példát Lemke módszerrel!

9. Példa

Tekintsünk n befektetési eszközt, amelyek várható hozama $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Az egyes befektetési eszközök hozamai között ismert a $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ kovarianciamátrix. A befektetési eszközöknek egy olyan portfólióját kívánjuk összeállítani, amelynél a portfólió varianciája (kockázat egyfajta mérőszáma) minimális és a befektető a portfólióval egy megadott r mennyiségű hozamot legalább biztosítani tud. Ezt a modellt Markowitz-féle portfóliókiválasztási modellnek nevezik. Jelölje $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a befektetési eszközök arányát a portfólióban.

A modell matematikai formája az alábbi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i c_{ij} x_j &\rightarrow \min! \\ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i &\geqq r \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 1 \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\geqq 0 \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a Feltételes optimalizálás c. tananyag 30. példájában is megoldottunk egy portfólió kiválasztási modellt, de ott a befektetési eszközöknek egy olyan portfólióját kívántuk összeállítani, amely a befektetőnek maximális hozamot biztosít a portfólió egy megadott szintű varianciája (σ_p^2) mellett.

Az egyes befektetési eszközök hozamai legyenek rendre: $30, 40, 50$. Legyen a hozamra előírt alsó korlát $r = 43$. Az egyes befektetési eszközök hozamai közötti kovariancákat az alábbi $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ kovarianciamátrix mutatja:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

Jelölje x_1, x_2, x_3 a befektetési eszközök arányát a portfólióban. A modell matematikai formája az alábbi:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(0.8x_1^2 - 0.4x_1x_2 + 0.2x_1x_3 + 0.5x_2^2 + 0.6x_2x_3 + 0.4x_3^2\right) &\rightarrow \min!\\
x_1 + x_2 + x_3 &= 1\\
30x_1 + 40x_2 + 50x_3 &\geqq 43\\
x_1, x_2, x_3 &\geqq 0
\end{aligned}$$

Ez egy kvadratikus programozási feladat, azonban nem teljesen olyan alakú, amelyet ismertettünk. A feltételek között egyenlőség is van. Az egyenletet egy $\geqq$ és egy $\leqq$ típusú egyenlőtlenséggel helyettesítjük. A $\leqq$ típusú egyenlőtlenséget (-1)-el beszorozva, így az egyenlőséget két $\geqq$ típusú egyenlőtlenséggel tudjuk helyettesíteni. A feladat átfogalmazva az alábbi alakú:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(0.8x_1^2 - 0.4x_1x_2 + 0.2x_1x_3 + 0.5x_2^2 + 0.6x_2x_3 + 0.4x_3^2\right) &\rightarrow \min!\\
x_1 + x_2 + x_3 &\geqq 1\\
-x_1 - x_2 - x_3 &\geqq -1\\
30x_1 + 40x_2 + 50x_3 &\geqq 43\\
x_1, x_2, x_3 &\geqq 0
\end{aligned}$$

Az ismertetett kvadratikus programozási feladaban szereplő mátrixok és vektorok tehát az alábbiak szerint alakulnak:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 30 & 40 & 50 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 43 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{0}.$$

A kvadratikus programozási feladat előírása, hogy a $\mathbf{Q}$ mátrix pozitív szemidefinit vagy pozitív definit legyen. A példabeli kovarianciamátrix pozitív definit, így a feladat megoldható az ismertetett algoritmusokkal. A feladatot criss-cross módszerrel oldjuk meg, az ehhez szükséges induló táblát, valamint az optimális táblát az alábbiakban közöljük.

Kiinduló bázistáblázat:

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	
$\bar{y}_1$	0	0	0	-1	-1	-1	-1
$\bar{y}_2$	0	0	0	1	1	1	1
$\bar{y}_3$	0	0	0	-30	-40	-50	-43
$\bar{x}_1$	1	-1	30	-0.8	0.2	-0.1	0
$\bar{x}_2$	1	-1	40	0.2	-0.5	-0.3	0
$\bar{x}_3$	1	-1	50	-0.1	-0.3	-0.4	0

Optimális bázistáblázat:

	$\bar{x}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	y_1	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	
x_1	-0.333	1.367	0.027	0	0.667	-0.333	0.22
y_2	-1.367	-1.297	$-0,031$	-1	-2.267	2.633	0.022
y_3	-0.027	$-0,031$	$-0,001$	0	-0.047	0.073	0.0066
$\bar{y}_1$	0	1	0	0	0	0	0
x_2	0.667	2.267	0.047	0	-1.333	0.667	0.26
x_3	$-0,333$	-2.633	-0.073	0	0.667	-0.333	0.52

Az optimális táblázatból leolvasható a portfóliókiválasztási feladat optimális megoldása: $x_1 = 0.22$, $x_2 = 0.26$, $x_3 = 0.52$ .Tehát a befektetőnek az optimális portfóliója olyan, amelyben az egyes befektetési eszközök aránya 22%, 26%, 52%.

Feladatok:
a) Ellenőrizze, hogy a **C** mátrix valóban pozitív definit mátrix!
b) Oldja meg a 9. példa portfóliókiválasztási feladatát Lemke módszerrel!

10. Példa

Tekintsük a Feltételes optimalizálás c. tananyagban lévő 31. példát. Egy vállalat két terméket állít elő két erőforrás igénybevételével. Az első termék egységnyi mennyiségű gyártásához az első erőforrásból 1, a második erőforrásból 0.2 mennyiséget használ fel. A második termék egységnyi mennyiségű gyártásához az első erőforrásból 0.5, a második erőforrásból is 0.5 mennyiséget használ fel. Egy adott időszakban az első erőforrásból legfeljebb 980, a másodikból pedig legfeljebb 220 mennyiség használható fel.

A termékek és az erőforrások egységára nem fix érték. A termékek eladási egységára függ a gyártott (eladott) mennyiségtől, mégpedig az alábbi módon: az első terméké $p_1^t = 2000 - 0.5x_1 - 0.15x_2$, a második terméké $p_2^t = 3000 - 0.2x_1 - 1.5x_2$. Az erőforrások egységára pedig függ az adott erőforrásból felhasznált mennyiségtől, azaz az $x_1 + 0.5x_2$, ill. a $0.2x_1 + 0.5x_2$ mennyiségektől az alábbiak szerint: $p_1^e = 375 - 0.05(x_1 + 0.5x_2)$, $p_2^e = 750 - 0.1(0.2x_1 + 0.5x_2)$. Tegyük fel, hogy a megtermelt termékeket el is tudjuk adni. Határozzuk meg az adott időszakban egyes termékekből termelhető mennyiséget, ha maximális nyereségre törekszik a vállalat!

Megoldás

Jelölje x_1, x_2 az egyes termékekből gyártott mennyiségeket. A nyereség a termékek eladásából származó árbevétel és a felhasznált erőforrásokra fordított kiadás különbsége, így a feladat célfüggvénye a következőképpen határozható meg:

$$\begin{aligned}
&\left[p_1^t x_1 + p_2^t x_2\right] - \left[(p_1^e(x_1 + 0.5x_2) + p_2^e(0.2x_1 + 0.5x_2)\right] = \\
&= \left[(2000 - 0.5x_1 - 0.15x_2)x_1 + (3000 - 0.2x_1 - 1.5x_2)x_2\right] - \\
&- \left\{\left[(375 - 0.05(x_1 + 0.5x_2))(x_1 + 0.5x_2)\right] + \left[(750 - 0.1(0.2x_1 + 0.5x_2))(0.2x_1 + 0.5x_2)\right]\right\}
\end{aligned}$$

A szorzásokat elvégezve a célfüggvény (nyereség) egyszerűbb formája:

$$1475x_1 + 2437.5x_2 - 0.446x_1^2 - 0.28x_1x_2 - 1.4625x_2^2$$

Összefoglalva a megoldandó optimalizálási feladat a következő:

$$\begin{aligned}
1475x_1 + 2437.5x_2 - 0.446x_1^2 - 0.28x_1x_2 - 1.4625x_2^2 &\rightarrow \text{max!} \\
x_1 + 0.5x_2 &\leqq 980 \\
0.2x_1 + 0.5x_2 &\leqq 220 \\
x_1, x_2 &\geqq 0
\end{aligned}$$

Egy kvadratikus programozási feladatot kaptunk. A feladat ugyanolyan alakú mint a duál feladat, csak hiányzik belőle a **C** mátrix. Ennek ellenére alakítsuk primál feladattá, a feltételeket és a célfüggvényt (-1)-el szorozva. A kvadratikus tagokból felépített

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.892 & 0.28 \\ 0.28 & 2.925 \end{bmatrix}$$

mátrix pozitív definit, így konvex kvadratikus programozási feladatot kell megoldani. A megismert algoritmusok mindegyike alkalmazható. Az algoritmushoz szükséges adatok a **Q** mátrixon kívül az alábbiak:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -980 \\ -220 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1475 \\ -2437.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ -0.2 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{0}.$$

A feladatot criss-cross módszerrel oldjuk meg.

Kiinduló és az optimális bázistáblázat:

	y_1	y_2	x_1	x_2	
$\bar{y}_1$	0	0	1	0.5	980
$\bar{y}_2$	0	0	0.2	0.5	220
$\bar{x}_1$	-1	-0.2	-0.892	-0.28	-1475
$\bar{x}_2$	-0.5	-0.5	-0.28	-2.925	-2437.5

	y_1	$\bar{y}_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	
$\bar{y}_1$	-0.56	-2.25	0,70	-0.28	132.11
y_2	2.25	-8.91	-1.57	-1.37	3698.05
x_1	0,70	1.57	-0.88	0.35	784.86
x_2	-0.28	1.37	0.35	-0.14	126.06

Az algoritmus lépéseiben az $\bar{x}_2 \leftrightarrow \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 \leftrightarrow x_1$, $\bar{y}_2 \leftrightarrow y_2$ principális pivotálásokat hajtottuk végre. Az optimális megoldás: $x_1 = 784.86$, $x_2 = 126.06$. Tehát a vállalat optimális termelése (kerekítve) az első termékből 785, a második termékből pedig 126 mennyiség. A maximális nyereség 1139250, az árbevétel 1581455, a kiadás 442205 pénzegység.

Megjegyzés:

A néhány megoldott kvadratikus programozási feladatnál tapasztaltuk, hogy a feladat alakja ritkán volt a szimmetrikus forma primál, ill. duál feladata. Amint tapasztaltuk, ekkor valamelyik alakra át kellett írni a feladatot. Általában a primál és a duál közül azt választottuk, amelyikhez leginkább hasonlított a feladat. Az olvasó választhatja azt a megoldást is, hogy mindig a primál alakra hozza a feladatot, ezt tettük a 10. példa megoldásánál is, annak ellenére, hogy szinte azonos volt a duál alakkal.

Feladat:

a) a) Oldja meg a 10. példa feladatát úgy, hogy a feladatot a duál feladatnak tekinti!

b) Oldja meg a 10. példa feladatát Lemke módszerrel!

Feladat:

Az $x_1 + x_2 = 8$ és az $x_1 - x_2 = 4$ egyenesek az (x_1, x_2) síkot négy tartományra bontják. A négy tartomány közül vegyük azt a résztartományt, amely tartalmazza a $(0, 10)$ pontot. Végezetül tekintsük azt a tartományt, amely a résztartomány és az első síknegyedbeli tartomány $(x_1, x_2 \geqq 0)$ közös része. Határozzuk meg a fent definiált tartomány azon pontját, amely az $(-1, 7)$ ponthoz a legközelebb van!

a) Fogalmazza meg a feladatot matematikai formában!

b) Vizsgálja meg a célfüggvényt konvexitás szempontjából!

c) Oldja meg a feladatot Lemke módszerrel!

d) Oldja meg a feladatot criss-cross módszerrel!

Feladat:

Adott az alábbi kvadratikus programozási feladat:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - 12x_3 + 2x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3 &\rightarrow \text{min!} \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leqq 32 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\geqq 12 \\ -x_1 + 2x_2 &\leqq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0 \end{aligned}$$

a) Vizsgálja meg a célfüggvényt konvexitás szempontjából!
b) Oldja meg a feladatot Lemke módszerrel!
c) Oldja meg a feladatot criss-cross módszerrel!

Feladat:
Adott a $1 \leqq x_1 \leqq 4$ és a $2 \leqq x_2 \leqq 6$ egyenlőtlenségekkel egy tartomány. Határozzuk meg a tartomány azon pontját, amely a $(6, 3)$ ponthoz a legközelebb van!
a) Fogalmazza meg a feladatot matematikai formában!
b) Vizsgálja meg a célfüggvényt konvexitás szempontjából!
c) Oldja meg a feladatot Lemke módszerrel!
d) Oldja meg a feladatot criss-cross módszerrel!

Feladat:
Adott az alábbi kvadratikus programozási feladat:

$$\begin{array}{rcl} 11x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 & \rightarrow & \min! \\ x_1 + x_2 & = & 10 \\ x_1, x_2 & \geqq & 0 \end{array}$$

a) Vizsgálja meg a célfüggvényt konvexitás szempontjából!
b) Oldja meg a feladatot Lemke módszerrel!
c) Oldja meg a feladatot criss-cross módszerrel!

Feladat:
Adott az alábbi kvadratikus programozási feladat:

$$\begin{array}{rcl} -6x_1 - 4x_2 + (x_1 - x_2)^2 & \rightarrow & \min! \\ -x_1 + x_2 & \leqq & 1 \\ x_1 - 2x_2 & \leqq & 2 \\ x_1, x_2 & \geqq & 0 \end{array}$$

a) Vizsgálja meg a célfüggvényt konvexitás szempontjából!
b) A feladat duáljának nincs lehetséges megoldása! Igazolja ezt a tény
- Lemke módszerrel,
- criss-cross módszerrel!