LAGRANGE DUALITÁS

Dr. Nagy Tamás
egyetemi docens

Miskolci Egyetem

Alkalmazott Matematikai Tanszék

Tartalomjegyzék

1. Lagrange duál feladat

A jól ismert lineáris programozási feladat tárgyalásánál láttuk, hogy egy optimalizálási feladathoz hozzárendelhető a vele szoros kapcsolatban lévő másik optimalizálási feladat. Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogyan rendelhető egy nemlineáris optimalizálási feladathoz egy másik, szintén optimalizálási feladat. A továbbá fejezetekben megvizsgáljuk a két feladat kapcsolatát. Tekintsük az alábbi jól ismert matematikai programozási feladatot. Ezt a feladatot a továbbiakban **primál feladatnak** fogjuk nevezni.

Primál feladat:

$$\begin{array}{ll} f(\mathbf{x}) \to \min! & \\ g_i(\mathbf{x}) \leqq 0 & i = 1, 2, \ldots, m \\ h_i(\mathbf{x}) = 0 & i = 1, 2, \ldots, k \\ \mathbf{x} \in X & \end{array}$$

ahol $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nemüres halmaz, $f,\ g_1, g_2, \ldots, g_m,\ h_1, h_2, \ldots, h_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények.

Megjegyzés:
Felhívjuk a figyelmet, hogy az X halmaz lehet nyílt vagy zárt, ellentétben az eddigi feltételes optimalizálási feladatainkkal, ahol az X nyílt halmaz volt.

A fent megfogalmazott primál feladathoz kapcsolódó másik optimalizációs feladatot **duál feladatnak** nevezzük. Többféle módon is definiálhatunk duál feladatot, mi azonban csak az ún. **Lagrange duál feladatot** ismertetjük. Az elnevezés onnan származik, hogy a matematikai programozási feladat Lagrange függvényének segítségével fogalmazzuk meg a duál feladatot. Először tekintsük a jól ismert Lagrange függvényt

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{k} v_i h_i(\mathbf{x}),$$

amely nem más mint a primál feladat célfüggvényének és a feltételi függvényeknek egyfajta lineáris kombinációja. Az egyes feltételekhez rendelt $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_k$ számokat **duál változóknak** vagy más néven **Lagrange szorzóknak** nevezzük.

Lagrange duál feladat:

$$\begin{array}{c} \Theta(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_k) \to \max! \\ u_i \geqq 0 \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

ahol

$$\begin{aligned} \Theta(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_k) &= \inf \{L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{x} \in X\} = \\ &= \inf \left\{ f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{k} v_i h_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \right\} \end{aligned}$$

Tehát a Lagrange duál feladat **célfüggvénye** nem más, mint a **Lagrange függvénynek** minden Lagrange szorzóhoz tartozó **infimuma** (legnagyobb alsó korlátja) az X **halmazon**. A Lagrange duál feladat **feltételi halmaza** egyszerű, hiszen csak az egyenlőtlenségekhez tartozó Lagrange szorzókra ír elő nemnegativitást.

Célszerű az egyenlőtlenséghez tartozó u_i számokat egy $\mathbf{u}$ vektorba, ill. az egyenlőségekhez tartozó v_i számokat egy $\mathbf{v}$ vektorba foglalni. Vezessük be a $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és a $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ vektorértékű függvényeket. A vektorjelölésekkel a két feladat egyszerűbben írható fel, a felírásban a skaláris szorzásnál elhagyjuk a transzponálás jelét. Ezt a jelölést fogjuk a későbbiekben is használni. Jelölje a továbbiakban S a primál feladat feltételi halmazát, azaz $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0},\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in X\}$.

Tehát a vektoros jelöléssel a két feladat a következő:

Primál feladat:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x}) \to \min! \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \in X \end{gathered}$$

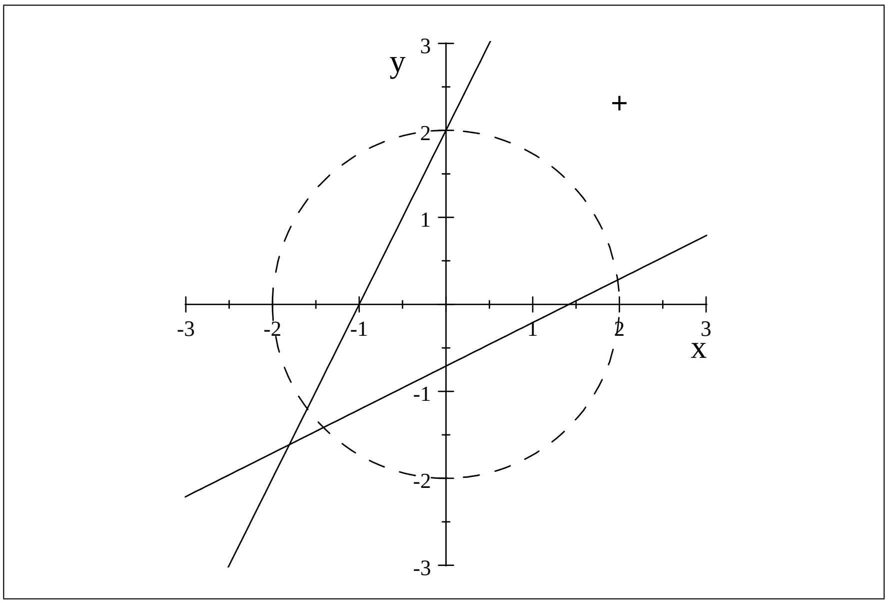
Lagrange duál feladat:

$$\begin{gathered} \Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to \max! \\ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0} \end{gathered}$$

ahol

$$\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \inf \{f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}\mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\}$$

Mielőtt a Lagrange dualitást elméletileg is megvizsgáljuk, az elmélet jobb megértése miatt nézzünk meg néhány példát. A példákban tapasztalni fogjuk, hogy az **infimum** keresés helyett szinte mindig **minimumot** keresünk. Nem minden feladatban létezik minimum, ezért nem tudjuk helyettesíteni minden esetben az infimumot minimummal. Ennek illusztrálására tekintsük az alábbi ábrát. Az S tartomány legyen a két egyenes közötti pontok (egyenesek pontjait is beleértve) és a kör **belsejében** lévő pontok közös része. A tartomány két darab g függvénnyel és a kör belsejét leíró nyílt X halmazzal állítható elő. Keressük az S tartománynak azt a pontját, amely legközelebb van a + jellel jelölt ponthoz. Látható, hogy ennek az optimalizálási feladatnak nincs **minimuma**, mivel X nyílt halmaz. Viszont van **infimuma**, legnagyobb alsó korlátja. Ha az X halmaz zárt lenne, akkor van minimum.



1. példa:

Legyen a primál feladat a következő:

Adott az (x_1, x_2) síkon az $x_1 + x_2 = 4$ egyenes, tekintsük az egyenes és a $-x_1 + x_2 \geqq 2$ féltér közös részét. Határozzuk meg a közös résznek, mint tartománynak azt a pontját, amely az origóhoz legközelebb van!

Határozzuk meg a duál feladatot és annak optimális megoldását!

Megoldás:

A fentebb megfogalmazott optimalizálási feladat az alábbi matematikai programozási feladatnak felel meg:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \to \min! \\ g(x_1, x_2) &= 2 + x_1 - x_2 \leqq 0 \\ h(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Ennek a feladatnak az optimális megoldása: $\bar{x}_1 = 1,\ \bar{x}_2 = 3,\ f_{\min} = f(\bar{\mathbf{x}}) = 10$. Javasoljuk az olvasónak az optimális megoldás KKT ponton keresztül történő meghatározását!

A Lagrange duál feladat felírásához meg kell határozni az X halmazt, ezen a halmazon kell a Lagrange függvény infimumát (minimumát) megkeresni. Többféle lehetőségünk van az X halmaz meghatározására, lényeg az, hogy az S **primál feltételi tartományt** a feltételi függvények és az X nemüres halmaz **együttesen** leírják. Néhány lehetőség:

1. Megtartjuk a g és h feltételi függvényeket, ekkor $X = \mathbb{R}^2$.
2. Megtartjuk a g feltételi függvényt, ekkor $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 - 4 = 0\}$.
3. Megtartjuk a h feltételi függvényt, ekkor $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2 + x_1 - x_2 \leqq 0\}$.

Tehát a feltételek alapján többféle Lagrange duál feladat is értelmezhető.

1. Vizsgáljuk először az $X = \mathbb{R}^2$ esetet, ekkor a Lagrange függvény az alábbi:

$$L(x_1, x_2, u, v) = x_1^2 + x_2^2 + u(2 + x_1 - x_2) + v(x_1 + x_2 - 4).$$

A duál feladat $\Theta(u, v)$ célfüggvénye nem más mint az $L(x_1, x_2, u, v)$ függvény infimuma (minimuma) az $X = \mathbb{R}^2$ halmazon, azaz ebben az esetben egy **feltétel nélküli** optimalizálási feladatként nyerhető:

$$\Theta(u, v) = \inf \left\{ x_1^2 + x_2^2 + u(2 + x_1 - x_2) + v(x_1 + x_2 - 4) \right\}.$$

Mivel az L függvény $\mathbf{x}$-ben konvex és differenciálható, így az $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} L = \mathbf{0}$ stacionárius egyenlet megoldása adja az optimumot. A

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} L = \begin{bmatrix} 2x_1 + u + v \\ 2x_2 - u + v \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

egyenletrendszer megoldása, azaz minden $u \geqq 0$ és tetszőleges $v \in \mathbb{R}$ esetén az optimális megoldás:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{u + v}{2} \\ x_2 &= \frac{u - v}{2} \end{aligned}$$

A duál feladat $\Theta(u,v)$ célfüggvényét egyszerű behelyettesítéssel kapjuk:

$$\begin{aligned}\Theta(u,v) &= \left(-\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 + u\left(2-\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}\right) + v\left(-\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}-4\right) = \\ &= -\frac{1}{2}u^2 + 2u - \frac{1}{2}v^2 - 4v.\end{aligned}$$

A duál feladat szerint ennek a függvénynek kell a maximumát keresni az $u \geqq 0$ feltétel mellett. Egyszerű átalakítással kapjuk, hogy

$$\Theta(u,v) = -\frac{1}{2}(u-2)^2 - \frac{1}{2}(v+4)^2 + 10,$$

így a duál feladat optimális megoldása: $\bar{u} = 2,\ \bar{v} = -4,\ \Theta_{\max} = \Theta(\bar{u},\bar{v}) = 10.$

A két feladat kapcsán több tulajdonságot is megfigyelhetünk:

A két feladat célfüggvényének optimális értéke **azonos**: $f_{\min} = \Theta_{\max}$.

A duál feladat célfüggvénye **konkáv** az u, v változókban. Erről az olvasó is könnyen meggyőződhet.

2. Most határozzuk meg a duál feladatot abban az esetben, amikor $X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 - 4 = 0\}$. Ekkor a Lagrange függvény az alábbi:

$$L(x_1,x_2,u) = x_1^2 + x_2^2 + u(2 + x_1 - x_2)$$

A duál feladat $\Theta(u)$ célfüggvénye nem más mint az $L(x_1,x_2,u)$ függvény infimuma (minimuma) az X halmazon, azaz ebben az esetben az alábbi **feltételes** optimalizálási feladatként nyerhető:

$$\Theta(u) = \inf\left\{x_1^2 + x_2^2 + u(2 + x_1 - x_2) : x_1 + x_2 - 4 = 0\right\},$$

vagy a megszokott jelöléssel:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + u(2 + x_1 - x_2) &\rightarrow \text{min!} \\ x_1 + x_2 - 4 &= 0\end{aligned}$$

Ezt a feltételes optimalizálási feladatot megoldhatjuk a KKT ponton keresztül vagy a feltételből az egyik ismeretlent kifejezve és a célfüggvénybe behelyettesítve egy feltétel nélküli feladatot kapunk. A megoldás módját az olvasóra bízzuk. Az optimális megoldás:

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 - \frac{u}{2} \\ x_2 &= 2 + \frac{u}{2}\end{aligned}$$

A duál feladat $\Theta(u)$ célfüggvényét egyszerű behelyettesítéssel kapjuk:

$$\begin{aligned}\Theta(u) &= \left(2-\frac{u}{2}\right)^2 + \left(2+\frac{u}{2}\right)^2 + u\left(2 + (2-\frac{u}{2}) - (2+\frac{u}{2})\right) = \\ &= -\frac{1}{2}u^2 + 2u + 8.\end{aligned}$$

Ennek a függvénynek kell a maximumát keresni az $u \geqq 0$ feltétel mellett. Egyszerű átalakítással kapjuk, hogy

$$\Theta(u) = -\frac{1}{2}(u-2)^2 + 10,$$

a maximum $\bar{u} = 2$, $\Theta_{\max} = \Theta(\bar{u}) = 10$.

Itt is ugyanazokat a tulajdonságokat figyelhetjük meg:

A két feladat célfüggvényének optimális értéke azonos: $f_{\min} = \Theta_{\max}$.

A duál feladat célfüggvénye konkáv az u változóban. Erről az olvasó is könnyen meggyőződhet.

3. Most határozzuk meg a duál feladatot abban az esetben, amikor $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2 + x_1 - x_2 \leqq 0\}$. Ekkor a Lagrange függvény az alábbi:

$$L(x_1, x_2, v) = x_1^2 + x_2^2 + v(x_1 + x_2 - 4)$$

A duál feladat $\Theta(v)$ célfüggvénye nem más mint az $L(x_1, x_2, v)$ függvény infimuma (minimuma) az X halmazon, azaz ebben az esetben az alábbi **feltételes** optimalizálási feladatként nyerhető:

$$\Theta(v) = \inf\left\{x_1^2 + x_2^2 + v(x_1 + x_2 - 4) : 2 + x_1 - x_2 \leqq 0\right\},$$

vagy a megszokott jelöléssel:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + v(x_1 + x_2 - 4) &\to \min! \\ 2 + x_1 - x_2 &\leqq 0 \end{aligned}$$

Ezt a feltételes optimalizálási feladatot megoldhatjuk a KKT ponton keresztül. A megoldást az olvasóra bízzuk. Az optimális megoldás:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{v}{2} - 1 \\ x_2 &= -\frac{v}{2} + 1 \end{aligned}$$

A duál feladat $\Theta(v)$ célfüggvényét egyszerű behelyettesítéssel kapjuk:

$$\begin{aligned} \Theta(v) &= \left(-\frac{v}{2} - 1\right)^2 + \left(-\frac{v}{2} + 1\right)^2 + v\left((-\frac{v}{2} - 1) + (-\frac{v}{2} + 1) - 4\right) = \\ &= -\frac{1}{2}v^2 - 4v + 2. \end{aligned}$$

Ennek a függvénynek kell a feltétel nélküli ($v \in \mathbb{R}$) maximumát keresni. Egyszerű átalakítással kapjuk, hogy

$$\Theta(v) = -\frac{1}{2}(v + 4)^2 + 10,$$

a maximum $\bar{v} = -4$, $\Theta_{\max} = \Theta(\bar{v}) = 10$.

Itt is ugyanazokat a tulajdonságokat figyelhetjük meg:

A két feladat célfüggvényének optimális értéke azonos: $f_{\min} = \Theta_{\max}$.

A duál feladat célfüggvénye konkáv a v változóban. Erről az olvasó is könnyen meggyőződhet.

2. példa

Tekintsük az alábbi egyváltozós, egyszerű optimalizálási feladatot! Határozzuk meg e primál feladathoz a Lagrange duál feladatot és adjuk meg a duál feladat optimális megoldását!

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \to \min! \\ g(x) &= 1 - x \leqq 0 \\ X &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Megoldás:

Mielőtt a duál feladat megoldásához hozzákezdenénk határozzuk meg a primál optimális megoldást. Egyszerűen, ránézésre megállapíthatjuk, hogy az optimális megoldás: $\bar{x} = 1$ és $f_{\min} = f(\bar{x}) = e$.

A $\Theta(u)$ duál célfüggvényre a definíció szerint azt kapjuk, hogy

$$\Theta(u) = \inf\{L(x,u) : x \in \mathbb{R}\} = \inf\{e^x + u(1-x) : x \in \mathbb{R}\}$$

A függvény, aminek a feltétel nélküli infimumát (minimumát) akarjuk meghatározni, konvex és differenciálható, így ott van minimuma, ahol az első derivált eltűnik, azaz az $x = \ln u$ helyen. A $\Theta(u)$ függvény, behelyettesítés után:

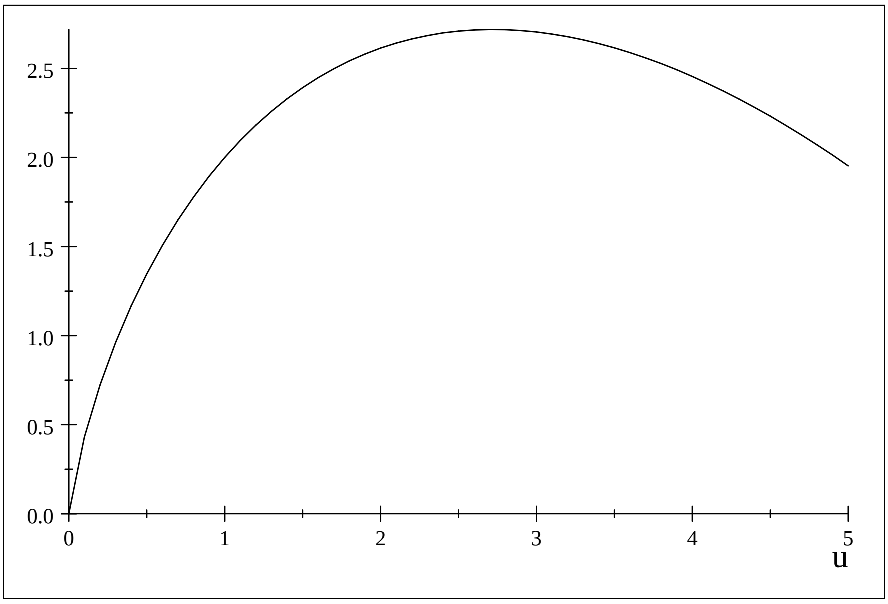
$$\Theta(u) = 2u - u \ln u$$

A Lagrange duál feladat tehát a következő:

$$\begin{aligned} \Theta(u) &= 2u - u\ln u \to \max! \\ u &\geqq 0 \end{aligned}$$

A $\Theta(u)$ függvénynek kell a maximumát megkeresni az $u \geqq 0$ feltétel figyelembevételével. Szintén a differenciálszámítást felhasználva, a duál feladat optimális megoldása $\bar{u} = e$ és $\Theta_{\max} = \Theta(\bar{u}) = e$.

Azt látjuk, hogy a két célfüggvény optimális értéke megegyezik és a duál célfüggvény konkáv, amit az alábbi ábrán is tapasztalhatunk.



3. példa

Tekintsük az alábbi optimalizálási feladatot! Határozzuk meg ehhez a primál feladathoz a Lagrange duál feladatot és adjuk meg a duál feladat optimális megoldását!

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \to \min! \\ g(x_1,x_2) &= -4x_1 - 2x_2 + 20 \leqq 0 \\ X &= \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geqq 0\right\} \end{aligned}$$

Megoldás:

A primál optimális megoldást a KKT feltételek segítségével határoztuk meg, amely az alábbi: $\bar{x}_1 = 4, \bar{x}_2 = 2$ és $f_{\min} = f(\bar{\mathbf{x}}) = 20$ (a Lagrange szorzó $\bar{u} = 2$). Javasoljuk az olvasónak az optimális megoldás meghatározását.

A $\Theta(u)$ duál célfüggvényre - a definíció szerint felírva - azt kapjuk, hogy

$$\Theta(u) = \inf\left\{x_1^2 + x_2^2 + u(-4x_1 - 2x_2 + 20) : x_1, x_2 \geqq 0\right\}$$

Könnyen láthatjuk, hogy $u < 0$ Lagrange szorzók esetén a minimalizálandó függvény értéke az $x_1, x_2 \geqq 0$ miatt csak nemnegatív lehet, a legkisebb értéket az $x_1 = x_2 = 0$ esetén kapjuk, ekkor a minimum értéke $20u$. Az $u \geqq 0$ Lagrange szorzók esetén a minimumot egy kis átalakítás után szintén könnyen megkaphatjuk:

$$\begin{aligned}
\Theta(u) &= \inf\left\{x_1^2 + x_2^2 + u(-4x_1 - 2x_2 + 20) : x_1, x_2 \geqq 0\right\} \\
&= 20u + \inf\left\{x_1^2 - 4ux_1 + x_2^2 - 2ux_2) : x_1, x_2 \geqq 0\right\} \\
&= 20u - 4u^2 - u^2 + \inf\left\{(x_1 - 2u)^2 + (x_2 - u)^2 : x_1, x_2 \geqq 0\right\}
\end{aligned}$$

A minimalizálandó függvény értéke, akkor a legkisebb, ha $x_1 = 2u$ és $x_2 = u$. Az $u \geqq 0$ miatt ez valóban a Lagrange függvény optimális megoldása az $x_1, x_2 \geqq 0$ halmazon. A Lagrange függvény minimum értéke: $20u - 5u^2$. Összefoglalva, a $\Theta(u)$ duál célfüggvényre az alábbiakat kapjuk:

$$\Theta(u) = \begin{cases} 20u - 5u^2, & u \geqq 0 \\ 20u, & u < 0 \end{cases}$$

A Lagrange duál feladat szerint ennek a $\Theta(u)$ függvénynek kell a maximumát megkeresni az $u \geqq 0$ feltétel figyelembevételével. A duál feladat optimális megoldása egyszerű számolás után $\bar{u} = 2$ és $\Theta_{\max} = \Theta(\bar{u}) = 20$.

Azt látjuk, hogy a két célfüggvény optimális értéke megegyezik és a $\Theta(u)$ függvény konkáv. Azt is tapasztaltuk, hogy a KKT feltételekben szereplő Lagrange szorzó és a duál változó optimális értéke azonos. Nem véletlen a Lagrange szorzó és a duál változó elnevezések használata.

4. példa

Tekintsük az (x_1, x_2) síkon a $(2,2), (0,2), (2,4), (0.5,4)$ pontokat! Határozzuk meg a $2x_1 - x_2$ függvény minimumát azon pontokban, amelyek az $x_1 + x_2 = 4$ egyenesen vagy alatta vannak! Határozzuk meg e primál feladathoz a Lagrange duál feladatot és adjuk meg optimális megoldását!

Az optimalizálási feladat, azaz a primál feladat a következő:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= 2x_1 - x_2 \to \min! \\
g(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 - 4 \leqq 0 \\
X &= \{(x_1, x_2) \in \{(2,2), (0,2), (2,4), (0.5,4)\}\}
\end{aligned}$$

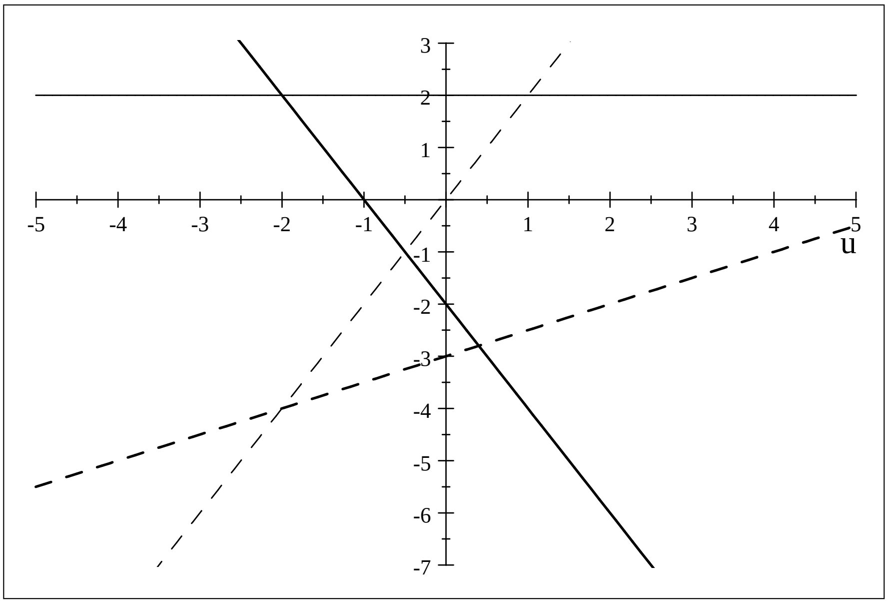
Megoldás

A primál feladat optimális megoldását egyszerűen meghatározhatjuk, hiszen csak az első két pont teljesíti a $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 4 \leqq 0$ feltételt. Az optimális megoldás: $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 2$ és $f(\bar{\mathbf{x}}) = f_{\min} = -2$.

A $\Theta(u)$ duál célfüggvényre - a definíció szerint felírva, majd az infimum képzéshez előkészítve - azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\Theta(u) &= \inf\{2x_1 - x_2 + u(x_1 + x_2 - 4) : (x_1, x_2) \in X\} \\
&= \inf\{2 + 0u,\ -2 - 2u,\ 0 + 2u,\ -3 + 0.5u\}
\end{aligned}$$

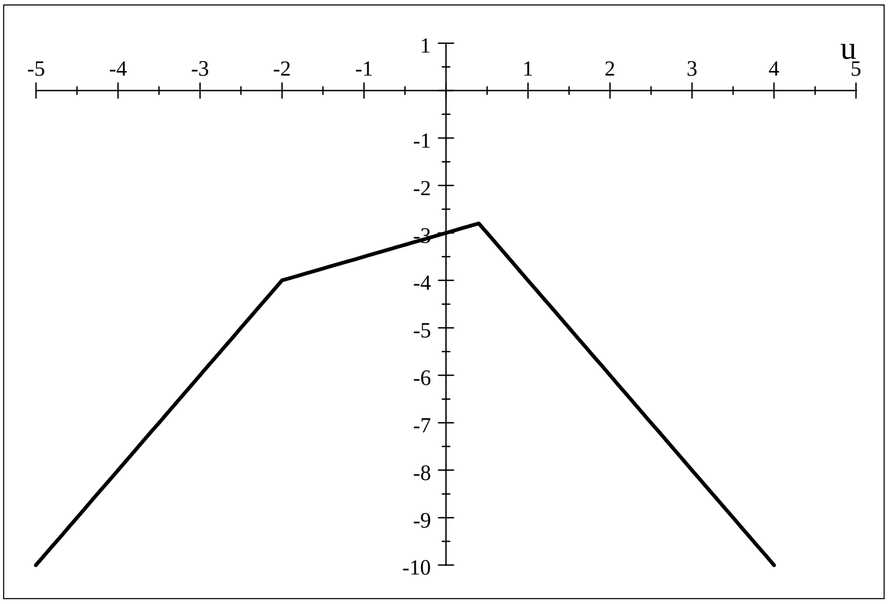
A négy mennyiséget az alábbiakban ábrázoljuk. A vékony folytonos vonal a $2 + 0u$, a vastag folytonos vonal a $-2 - 2u$, a vékony szaggatott vonal a $0 + 2u$, a vastag szaggatott vonal pedig a $-3 + 0.5u$ függvényt ábrázolja.



Az ábrából leolvasható, hogy az u Lagrange szorzó melyik tartományában adódik a Lagrange függvény minimuma. A $\Theta(u)$ duál célfüggvény az alábbiak szerint alakul:

$$\Theta(u) = \begin{cases} 2u, & u \leqq -2 \\ -3 + 0.5u, & -2 \leqq u \leqq 0.4 \\ -2 - 2u, & u \geqq 0.4 \end{cases}$$

A duál feladat célfüggvényének ábrázolása:



A Lagrange duál feladat szerint ennek a $\Theta(u)$ függvénynek kell a maximumát megkeresni az $u \geqq 0$ feltétel figyelembevételével. A duál feladat optimális megoldása egyszerűen adódik: $\bar{u} = 0.4$, $\Theta_{\max} = \Theta(\bar{u}) = -2.8$.

Ebben a példában azt tapasztaltuk, hogy a két célfüggvény optimális értéke **nem egyezik meg**, pontosabban $f_{\min} > \Theta_{\max}$. Viszont a duál célfüggvény most is konkáv.

5. példa

Tekintsük az alábbi optimalizálási feladatot! Határozzuk meg ehhez a primál feladathoz a Lagrange duál feladatot és adjuk meg a duál feladat optimális megoldását!

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 - x_2^2 \to \min! \\ g(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 - 2 \leqq 0 \\ X &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leqq x_1 \leqq 4, -2 \leqq x_2 \leqq 4\right\} \end{aligned}$$

Megoldás:

A primál optimális megoldást a KKT feltételek segítségével vagy ábrázolás útján határozhatjuk meg, amely az alábbi: $\bar{x}_1 = -2, \bar{x}_2 = 4$ és $f_{\min} = f(\bar{\mathbf{x}}) = -12$.

Az optimalizálási feladat Lagrange függvénye:

$$L(x_1, x_2, u) = x_1^2 - x_2^2 + u(x_1 + x_2 - 2)$$

A duál feladat $\Theta(u)$ célfüggvénye nem más mint az $L(x_1, x_2, u)$ függvény infimuma (minimuma) az X halmazon, azaz az alábbi **feltételes** optimalizálási feladatként nyerhető:

$$\Theta(u) = \inf\left\{x_1^2 - x_2^2 + u(x_1 + x_2 - 2) : (x_1, x_2) \in X\right\}.$$

A $\Theta(u)$ függvényt az alábbi módon is meghatározhatjuk:

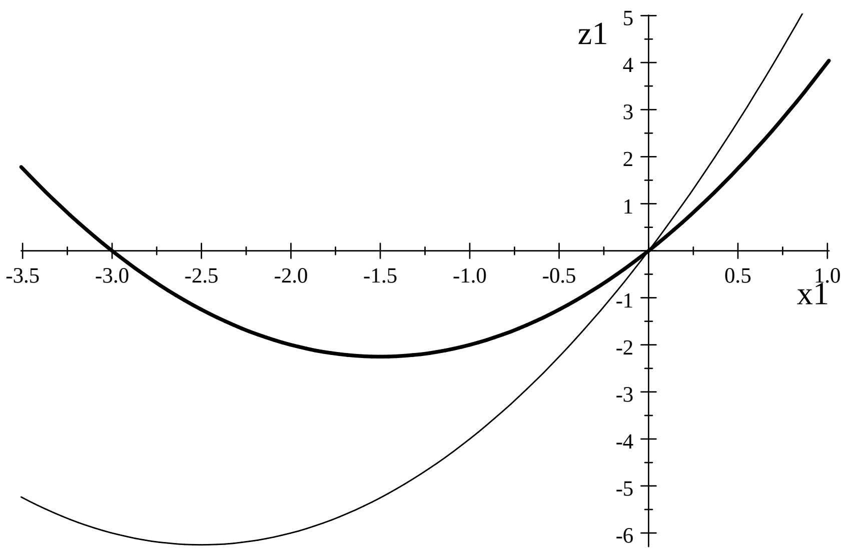
$$\Theta(u) = -2u + \inf\left\{x_1^2 + ux_1 : -2 \leqq x_1 \leqq 4\right\} + \inf\left\{-x_2^2 + ux_2) : -2 \leqq x_2 \leqq 4\right\}$$

a) Először az első minimumképzést végezzük el. Jelölje a minimalizálandó mennyiséget z_1, azaz a $z_1 = x_1^2 + ux_1$ függvénynek a minimumát kell meghatározni az X halmazon minden $u \geqq 0$ Lagrange szorzó esetében. Az (x_1, z_1) síkon a függvény képe egy **felfelé nyúló parabola**. Ennek a parabolának a **legalsó pontja** az $x_1 = -\frac{u}{2}$ helyen van.

A parabola legalsó pontja $(-\frac{u}{2})$ csak akkor lehet a z_1 függvény **minimumpontja**, ha ez a pont az X tartományban van, azaz ha $-\frac{u}{2} \geqq -2$. Tehát ha a Lagrange szorzó $0 \leqq u \leqq 4$, akkor a minimumpont $x_1 = -\frac{u}{2}$.

Amennyiben a parabola legalsó pontja $(-\frac{u}{2})$ az X tartományon kívülre esik, azaz ha $-\frac{u}{2} \leqq -2$, akkor a z_1 függvény **minimumpontja** a tartomány bal szélén van. Tehát ha a Lagrange szorzó $u \geqq 4$, akkor a minimumpont $x_1 = -2$.

Az alábbi ábrában a vastag vonallal rajzolt parabola az $u = 3$, a vékony vonallal rajzolt az $u = 5$ Lagrange szorzóhoz tartozik.



Az első minimumképzés eredményét összefoglalva:

$$z_1 = \begin{cases} (-\frac{u}{2})^2 + u(-\frac{u}{2}) = -\frac{u^2}{4}, & 0 \leqq u \leqq 4 \\ (-2)^2 + u(-2) = -2u + 4, & u \geqq 4 \end{cases}$$

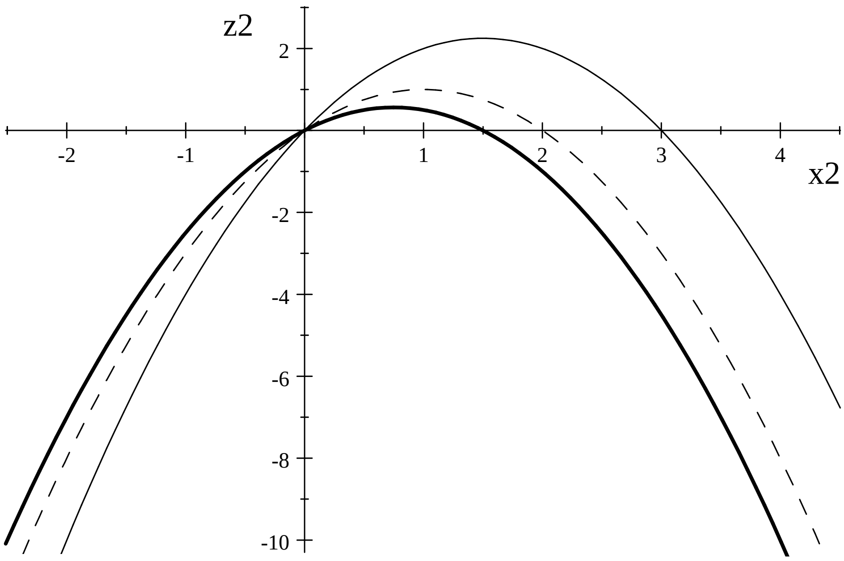
b) Most a második minimumképzést végezzük el. Jelölje a minimalizálandó mennyiséget z_2, azaz a $z_2 = -x_2^2 + ux_2$ függvénynek a minimumát kell meghatározni az X halmazon minden $u \geqq 0$ Lagrange szorzó esetében. Az (x_2, z_2) síkon a függvény képe egy **lefelé nyúló parabola**. Ennek a parabolának a **legfelső pontja** az $x_2 = \frac{u}{2}$ helyen van, erre a pontra szimmetrikus a parabola.

A $-2 \leqq x_2 \leqq 4$ tartomány középpontja az $x_2 = 1$ helyen van, ennek az $u = 2$ felel meg. Az $u = 2$ esetén a szimmetriatengely a tartomány középpontja, így a z_2 függvény **minimumpontja** a tartomány határain van ($x_2 = -2$, ill. $x_2 = 4$), mindkettőben azonos értékű a minimum.

Ha a parabola legfelső pontja **jobbra** tolódik (a szimmetriatengely közelebb kerül az X tartomány **jobboldali** határához), akkor a z_2 függvény **minimumpontja** a tartomány **baloldali** határán van. Tehát $u \geqq 2$ esetén a minimumpont $x_2 = -2$.

Ha a parabola legfelső pontja **balra** tolódik (a szimmetriatengely közelebb kerül az X tartomány **baloldali** határához), akkor a z_2 függvény **minimumpontja** a tartomány **jobboldali** határán van. Tehát $0 \leqq u \leqq 2$ esetén a minimumpont $x_2 = 4$.

Az alábbi ábrában a vastag vonallal rajzolt parabola az $u = 1.5$, a vékony vonallal rajzolt az $u = 3$, a szaggatott vonallal rajzolt pedig az $u = 2$ Lagrange szorzóhoz tartozik, ez utóbbinak a szimmetriatengelye $x_2 = 1$.



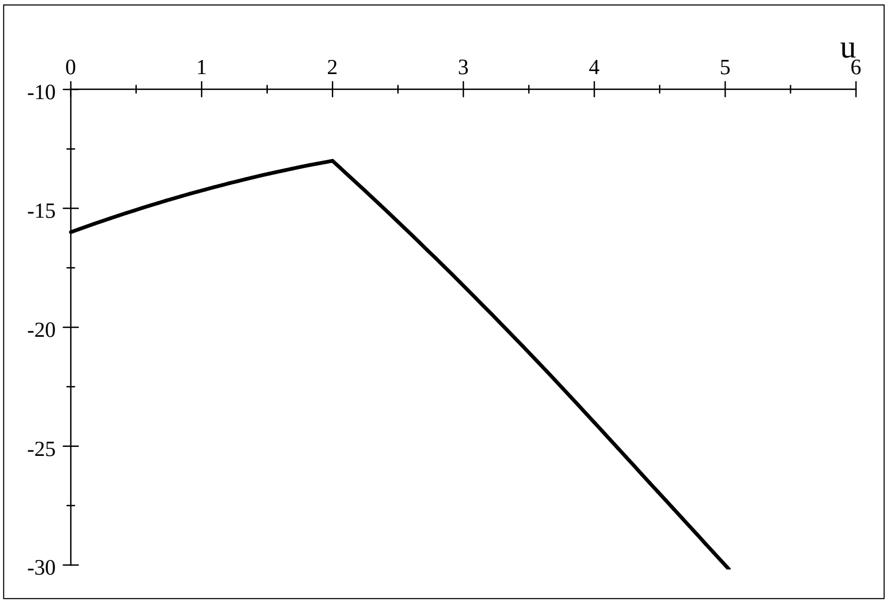
A második minimumképzés eredményét összefoglalva:

$$z_2 = \begin{cases} -(4)^2 + u(4) = 4u - 16, & 0 \leqq u \leqq 2 \\ -(-2)^2 + u(-2) = -2u - 4, & u \geqq 2 \end{cases}$$

A fenti minimumképzések után már könnyen meghatározhatjuk a duál feladat $\Theta(u)$ célfüggvényét, amely $\Theta(u) = -2u + z_1 + z_2$. A Lagrange szorzókra vonatkozó tartományokat figyelembe véve az alábbiakat kapjuk:

$$\Theta(u) = \begin{cases} -\frac{u^2}{4} + 2u - 16, & 0 \leqq u \leqq 2 \\ -\frac{u^2}{4} - 4u - 4, & 2 \leqq u \leqq 4 \\ -6u, & u \geqq 4 \end{cases}$$

Az alábbi ábra a Lagrange duál feladat $\Theta(u)$ célfüggvényét mutatja. Az ábrán ugyan nem látszanak erőteljesen a parabola szakaszok, de könnyen megállapíthatjuk $\Theta(u)$ célfüggvény maximumát.



A duál feladat optimális megoldása: $\bar{u} = 2$, $\Theta_{\max} = \Theta(\bar{u}) = -13$.

Azt tapasztaltuk, hogy a két célfüggvény optimális értéke **nem egyezik meg** ($f_{\min} > \Theta_{\max}$) és a $\Theta(u)$ függvény konkáv.

6. példa

Tekintsük az alábbi egyváltozós optimalizálási feladatot! Határozzuk meg ehhez a primál feladathoz a Lagrange duál feladatot és adjuk meg a duál feladat optimális megoldását!

$$\begin{aligned} f(x) &= x \to \min! \\ g(x) &= x^2 \leqq 0 \\ X &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Megoldás:

A primál optimális megoldás nagyon egyszerűen adódik, amely az alábbi: $\bar{x} = 0$ és $f_{\min} = f(\bar{x}) = 0$.

Az optimalizálási feladat Lagrange függvénye:

$$L(x, u) = x + ux^2$$

A duál feladat $\Theta(u)$ célfüggvénye nem más mint az $L(x, u)$ függvény infimuma (minimuma) az X halmazon, azaz az alábbi **feltétel nélküli** optimalizálási feladatként nyerhető:

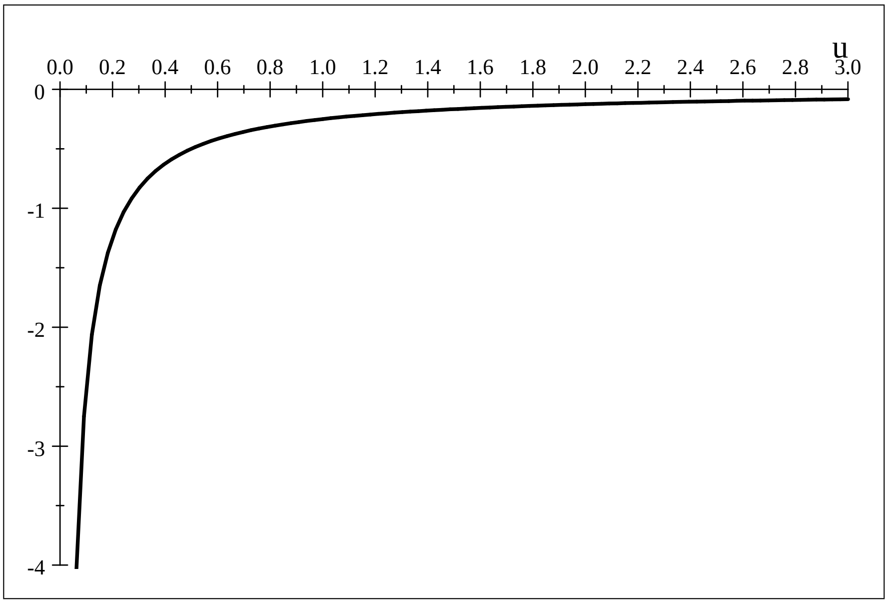
$$\Theta(u) = \inf \left\{ x + ux^2 : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Az $L(x, u) = x + ux^2$ függvénynek $u = 0$ esetén nincs minimuma, infimuma van, értéke $-\infty$. Az $u > 0$ esetén viszont minimum van. Mivel feltétel nélküli optimalizálási feladatról van szó és az $L(x, u)$ differenciálható konvex függvény, így az $L'_x = 0$ stacionárius egyenlet megoldása adja a minimumpontot. Az $L'_x = 1 + 2ux = 0$ megoldása $x = -\frac{1}{2u}$, a minimumérték $(-\frac{1}{2u}) + u(-\frac{1}{2u})^2 = -\frac{1}{4u}$.

Összefoglalva, a $\Theta(u)$ duál célfüggvényre az alábbiakat kapjuk:

$$\Theta(u) = \begin{cases} -\frac{1}{4u}, & u > 0 \\ -\infty, & u = 0 \end{cases}$$

a célfüggvény képét az alábbi ábra mutatja:



A $\Theta(u)$ duál célfüggvénynek nincs maximuma, csak supremuma (legkisebb felső korlátja), amelynek értéke 0.

Ebben a példában azt tapasztaltuk, hogy a **primál célfüggvény infimuma megegyezik a duál célfüggvény szuprémumával**. A duál célfüggvény most is konkáv.

7. példa

Tekintsük az alábbi optimalizálási feladatot! Határozzuk meg ehhez a primál feladathoz a Lagrange duál feladatot és adjuk meg a duál feladat optimális megoldását!

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= e^{-x_1} \to \min! \\ g(x_1, x_2) &= \frac{x_1^2}{x_2} \leqq 0 \\ X &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\right\} \end{aligned}$$

Megoldás:

A primál optimális megoldás nagyon egyszerűen adódik, amely az alábbi: $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 > 0$ és $f_{\min} = f(\bar{\mathbf{x}}) = 1$.

Az optimalizálási feladat Lagrange függvénye:

$$L(\mathbf{x}, u) = e^{-x_1} + u\frac{x_1^2}{x_2}$$

A duál feladat $\Theta(u)$ célfüggvénye nem más mint az $L(\mathbf{x}, u)$ függvény infimuma (minimuma) az X halmazon, azaz az alábbi **feltételes** optimalizálási feladatként nyerhető:

$$\Theta(u) = \inf\left\{e^{-x_1} + u\frac{x_1^2}{x_2} : \mathbf{x} \in X\right\}.$$

Az $L(\mathbf{x}, u) = e^{-x_1} + u\frac{x_1^2}{x_2}$ függvény minden $u \geqq 0$ esetén nemnegatív az X tartományon, legkisebb, értéke 0, így a duál célfüggvényre $\Theta(u) = 0$ adódott minden $u \geqq 0$ esetén. A $\Theta(u)$ duál célfüggvénynek maximuma $\Theta_{\max} = 0$.

Ebben a példában azt tapasztaltuk, hogy a primál célfüggvény minimuma **nem egyezik meg** ($f_{\min} > \Theta_{\max}$) a duál célfüggvény maximumával.

8. példa

Tekintsük az alábbi lineáris programozási feladatot! Határozzuk meg ehhez a primál feladathoz a Lagrange duál feladatot!

$$\begin{aligned} 6x_1 + 8x_2 &\to \text{max!} \\ 2x_1 + 3x_2 &\leqq 12 \\ 2x_1 + \ x_2 &\geqq 2 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Megoldás:

A lineáris programozás jól ismert, így fel is tudjuk írni a duál feladatot, amely a következő:

$$\begin{aligned} 12y_1 + 2y_2 &\to \text{min!} \\ 2y_1 + 2y_2 &\leqq 6 \\ 3y_1 + \ y_2 &\geqq 8 \\ y_1 &\geqq 0 \\ y_2 &\leqq 0 \end{aligned}$$

A primál és a duál feladat optimális megoldása (megoldás szimplex módszerrel történt):

$$\begin{aligned} x_1 &= 6,\ x_2 = 0,\ f_{\max} = 36 \\ y_1 &= 3,\ y_2 = 0,\ \Theta_{\min} = 36 \end{aligned}$$

A duál feladatot most a Lagrange duál feladatnak a definíciója alapján határozzuk meg. A feladatot minimalizálási feladattá alakítjuk a célfüggvény (-1)-el való szorzásával. Az X halmazt a változókra előírt nemnegativitásból származtatjuk. Ekkor a szokásos jelölésekkel az alábbi primál feladat adódik:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= -(6x_1 + 8x_2) \to \text{min!} \\ g_1(x_1, x_2) &= 2x_1 + 3x_2 - 12 \leqq 0 \\ g_2(x_1, x_2) &= 2 - 2x_1 - x_2 \leqq 0 \\ X &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geqq 0\right\} \end{aligned}$$

Az optimalizálási feladat Lagrange függvénye:

$$L(x_1, x_2, u_1, u_2) = -(6x_1 + 8x_2) + u_1(2x_1 + 3x_2 - 12) + u_2(2 - 2x_1 - x_2),$$

amely átrendezéssel az alábbiak szerint is írható:

$$L(x_1, x_2, u_1, u_2) = -12u_1 + 2u_2 + (2u_1 - 2u_2 - 6)x_1 + (3u_1 - u_2 - 8)x_2.$$

Ha $2u_1 - 2u_2 - 6 \geqq 0$ és $3u_1 - u_2 - 8 \geqq 0$, akkor az utolsó két tag nemnegatív az X halmazon, azaz $x_1, x_2 \geqq 0$ esetén. Ennek a két tagnak a minimális (zérus) értéke az X halmazon az $x_1 = x_2 = 0$ helyen éretik el, így ekkor a duál célfüggvény

$$\Theta(u_1, u_2) = -12u_1 + 2u_2.$$

Ha u_1, u_2 nem esik a fentebb adódó tartományba, akkor az utolsó két tag közül legalább az egyik negatív az X halmazon, ekkor a két tag összegének minimális értéke $-\infty$, így $\Theta(u_1, u_2) = -\infty$.

Összefoglalva a duál célfüggvényre az alábbi adódik:

$$\Theta(u_1, u_2) = \begin{cases} -12u_1 + 2u_2, & \text{ha } 2u_1 - 2u_2 - 6 \geqq 0,\ 3u_1 - u_2 - 8 \geqq 0 \\ -\infty, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

A duál feladat pedig a következő:

$$\begin{aligned} -12u_1 + 2u_2 &\rightarrow \text{max!} \\ 2u_1 - 2u_2 &\geqq 6 \\ 3u_1 - u_2 &\geqq 8 \\ u_1, u_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Látható, hogy ez nem teljesen azonos formájú a megoldás elején közölt duál feladattal. Ez természetes, hiszen nem az eredeti feladat duálisát határoztuk meg, a célfüggvényt ugyanis (-1)-el beszoroztuk. Ahhoz, hogy a duál feladat minimalizálási feladat legyen, ezt a célfüggvényt is szorozzuk be (-1)-el, ekkor a célfüggvény: $12u_1 - 2u_2$. Még mindig nem teljes az azonosság, ehhez vezessük be az u_1, u_2 helyett az $y_1 = u_1 \geqq 0$ és az $y_2 = -u_2 \leqq 0$ új duál változókat, akkor a megoldás elején közölt duál feladatot kapjuk.

Tapasztalhatjuk, hogy a duál célfüggvény lineáris, amely konkáv függvénynek (konvexnek is) tekinthető.

Megjegyzés:

Az eddigi primál feladatok (utóbbit kivéve) minimum feladatok voltak. Nyilvánvaló, hogy a gyakorlatban legalább annyiszor előfordul a maximum feladat is. A maximum feladat duálját kétféleképpen határozhatjuk meg:

a) Definiáljuk a maximum feladat Lagrange függvényét és annak segítségével (hasonlóan a minimum feladathoz) írjuk fel a duál feladatot.

b) Átírjuk a feladatot minimum feladattá, ahogy a 8. példában tettük. Ahogy láttuk apró átalakításokat végezhetünk abból a célból, hogy a duál feladatban ugyanazok az alapadatok szerepeljenek mint a primál feladatban, ne pedig (-1)-szeresei.

Feladat:

Adott az alábbi optimalizálási feladatot. Határozzuk meg ehhez a primál feladathoz a Lagrange duál feladatot és adjuk meg a duál feladat optimális megoldását!

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{min!} \\ g(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 - 3 \leqq 0 \\ X &= \{(x_1, x_2) \in \{(0,0), (4,0), (0,4), (4,4), (2,1), (1,2)\}\} \end{aligned}$$

Feladat:

Adott az alábbi egyváltozós optimalizálási feladatot. Határozzuk meg ehhez a primál feladathoz a Lagrange duál feladatot és adjuk meg a duál feladat optimális megoldását!

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 1 \rightarrow \text{min!} \\ g(x) &= (x-2)(x-4) \leqq 0 \end{aligned}$$

Feladat:

Adott egy origó közepű $\sqrt{8}$ sugarú körlap (kör pontjai és a kör belső pontjai). Tekintsük a körlap első síknegyedbe eső tartományát a határokkal együtt.

A) Két primál feladatot fogalmazunk meg: Határozza meg a tartomány azon pontját, amelynél az abszcissza és az ordináta összege

a) minimális!

b) maximális!

B) Határozza meg mindkét primál feladat Lagrange duál feladatát!

C) Vizsgálja meg a duál célfüggvényeket konkávitás szempontjából!

D) Vizsgálja meg a primál és a duál célfüggvények optimális értékének viszonyát!

Javaslat: A X halmaz mindkét primál feladatnál a nemnegativitásra vonatkozzon!

2. A duál feladat geometriai interpretációja

Az alábbiakban néhány példán keresztül a duál feladat geometriai vonatkozásait vizsgáljuk meg.

9. példa

Tekintsük a 2. példában közölt egyváltozós, egyszerű optimalizálási feladatot! Vizsgáljuk meg a duál feladat geometriai viszonyait!

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \to \min! \\ g(x) &= 1 - x \leqq 0 \\ X &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Megoldás:

A Lagrange függvény:

$$L(x, u) = e^x + u(1 - x)$$

A Lagrange duál feladat:

$$\begin{gathered} \Theta(u) \to \max! \\ u \geqq 0 \end{gathered}$$

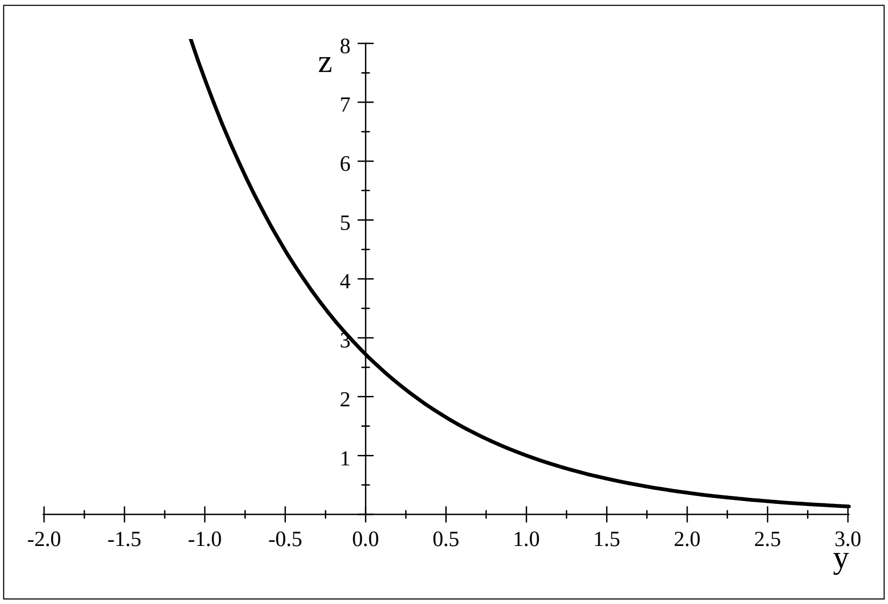
ahol

$$\Theta(u) = \inf \{e^x + u(1 - x) : x \in X = \mathbb{R}\}$$

Az (y, z) síkra **képezzük le** az $X = \mathbb{R}$ halmazt az alábbiak szerint: Minden $x \in X = \mathbb{R}$ számnak az (y, z) síkon megfeleltetünk egy pontot, úgy hogy az y abszcissza a **feltételi függvény értékét**, a z ordináta pedig a **célfüggvény értékét** kapja, így keletkezik egy G halmaz, amely képletben az alábbiak szerint írható:

$$G = \{(y, z) : y = 1 - x,\ z = e^x,\ x \in X = \mathbb{R}\}$$

A G halmazt fel is rajzolhatjuk az (y, z) koordinátarendszerben, jelen példában a $z = e^{1-y}$ függvény görbéjének a pontjai alkotják a G halmazt. Ezt mutatja az alábbi ábra:

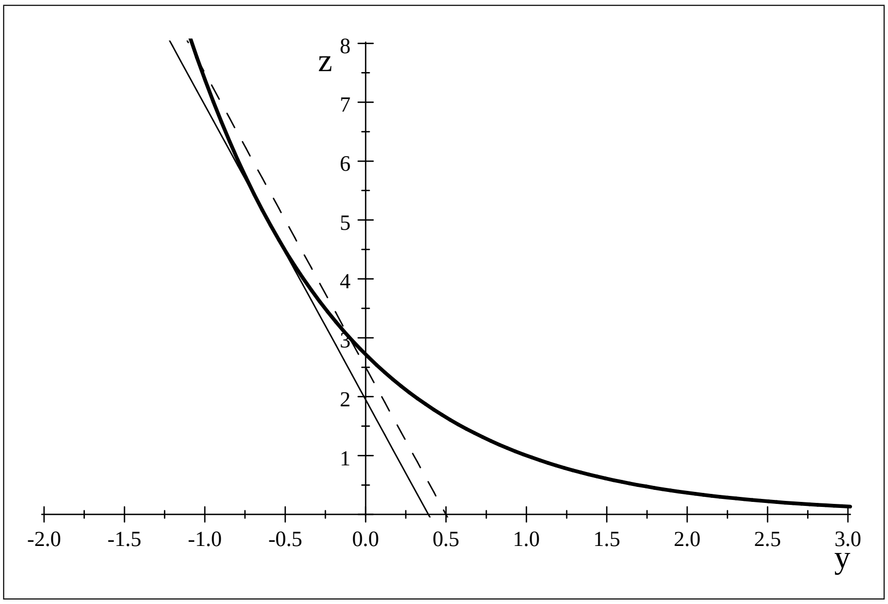


A primál feladatot geometriailag megoldani annyit tesz, mint megkeresni a G görbe azon pontját, ahol $y \leqq 0$ és z minimális, hiszen a primál feladat: $y = g(x) \leqq 0,\ z = f(x) \to \min!$ A primál optimális megoldás: $y = 0,\ z = e$, amelyből $\bar{x} = 1,\ f_{\min} = e$.

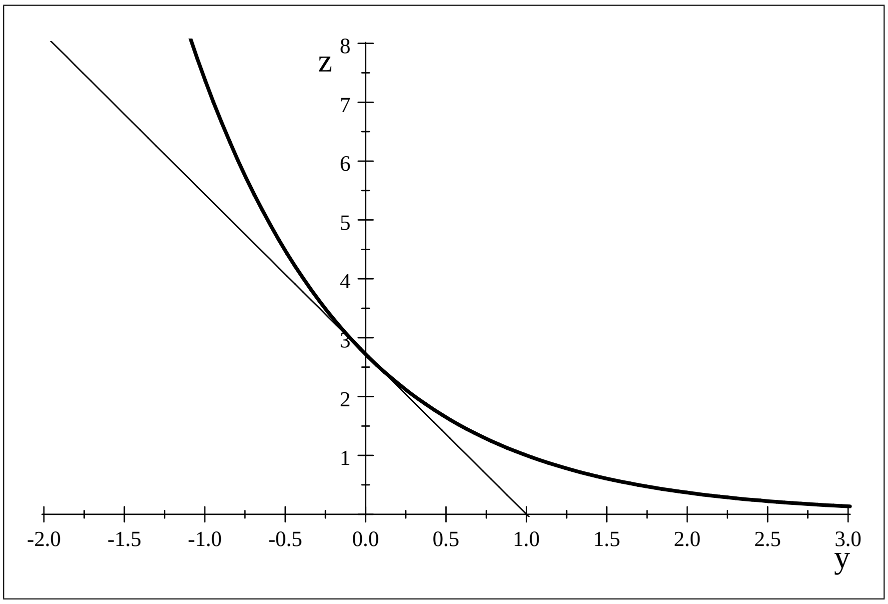
A duál feladat $\Theta(u)$ célfüggvénye a transzformált helyzetben az alábbi szerint írható:

$$\Theta(u) = \inf\{z + uy : (y, z) \in G\},$$

tehát minden $u \geqq 0$ Lagrange szorzóra a $z+uy$ Lagrange függvény minimumát kell meghatározni a G halmazon. Legyen a Lagrange függvény értéke egy adott α szám, azaz $z+uy = \alpha$. Ez az (y, z) koordinátarendszerben egy $-u$ meredekségű egyenes. Ez az egyenes **balról lefelé irányul**, mivel meredeksége $u \geqq 0$ miatt negatív. Ha az egyenest **párhuzamosan** eltoljuk **lefelé**, akkor $z+uy$ függvény értéke **csökkenni** fog, viszont a G görbétől nem távolodhatunk el, hiszen a G görbén kell minimalizálni a $z + uy$ Lagrange függvényt. Ebből adódik, hogy legfeljebb a G görbe érintőpontjáig tolhatjuk el az egyenest. Tehát egy adott u értékhez meg kell keresni, hogy a $-u$ meredekségű (balról lefelé futó) egyenes hol érinti a G görbét. Az érintési ponthoz tartozó y és z értékkel határozhatjuk meg az adott u-hoz tartozó $\Theta(u)$ értéket a $\Theta(u) = z + uy$ képlettel. Minden $u \geqq 0$ értékre más-más meredekségű egyenest kapunk, amelyek érintési pontjából számíthatjuk $\Theta(u)$ értékét. Mivel az érintőegyenes minden pontjában azonos a $\Theta(u) = z + uy$ érték, így az $y = 0$ helyen vett z érték is ugyanazt a $\Theta(u)$ értéket szolgáltatja. Tehát a $\Theta(u)$ értékét az érintőegyenesnek a z tengelyből lemetszett szakasza adja. Az alábbi ábrában az egyenesek az $u = 5$ értékhez tartoznak, a szaggatottan rajzolt egyenesnél a $z + uy$ függvény értéke 2.5, a vékonyan rajzolt érintőegyenes pedig a legkisebb $z + uy = 2$ értékhez tartozik.



A duál feladat mint ismeretes nem más mint meghatározni azt az $u \geqq 0$ értéket, amelynél a $\Theta(u)$ duál célfüggvény a legnagyobb. Ez geometriailag azt jelenti, hogy a G görbét érintő érintőegyenesek közül azt kell meghatározni, amely a z tengelyből a legnagyobbat metszi le. Az alábbi ábrában látható az optimális érintőegyenes, a z tengelymetszete $z = e$, az optimális megoldás: $\bar{u} = e$, $\Theta_{\max} = e$.



10. példa
Tekintsük az alábbi optimalizálási feladatot!

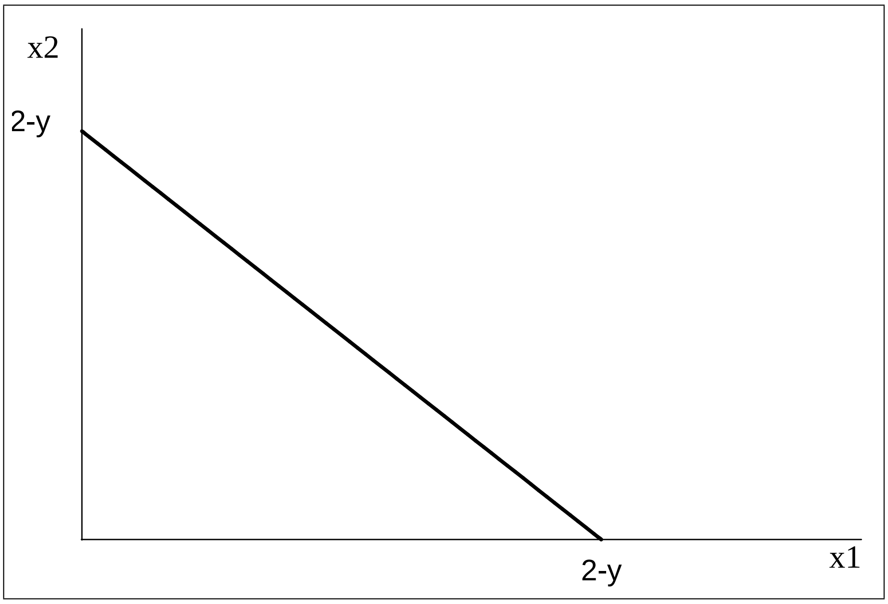
$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \to \min! \\ g(x_1, x_2) &= 2 - (x_1 + x_2) \leqq 0 \\ X &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geqq 0\right\} \end{aligned}$$

Megoldás:
Az (y, z) síkra képezzük le az X halmazt az alábbiak szerint: Minden $\mathbf{x} \in X$ ($\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$) vektornak az (y, z) síkon megfeleltetünk egy pontot, úgy hogy az y abszcissza a feltételi

függvény értékét, a z ordináta pedig a célfüggvény értékét kapja, így keletkezik egy G halmaz, amely képletben az alábbiak szerint írható:

$$G = \left\{(y,z) : y = 2-(x_1+x_2),\ z = x_1^2+x_2^2,\ x_1,x_2 \geqq 0\right\}$$

Ahhoz, hogy a G halmazt meghatározzuk, azaz az y és z kapcsolatát megállapítsuk célszerű először ábrázolni az (x_1,x_2) sík X tartományában az x_1,x_2 és az y kapcsolatát. A változók közötti összefüggés: $x_1+x_2 = 2-y$ és $x_1,x_2 \geqq 0$, amelyből $y \leqq 2$. A kapcsolat az X $(x_1,x_2 \geqq 0)$ tartományban egy **egyenes szakasszal** jellemezhető. Különböző y értékekhez párhuzamos egyenes szakaszok tartoznak. Az alábbi ábra egy adott $y \leqq 2$ értékhez tartozó egyenes szakaszt ábrázol, az $y=2$ értékhez az origó tartozik.

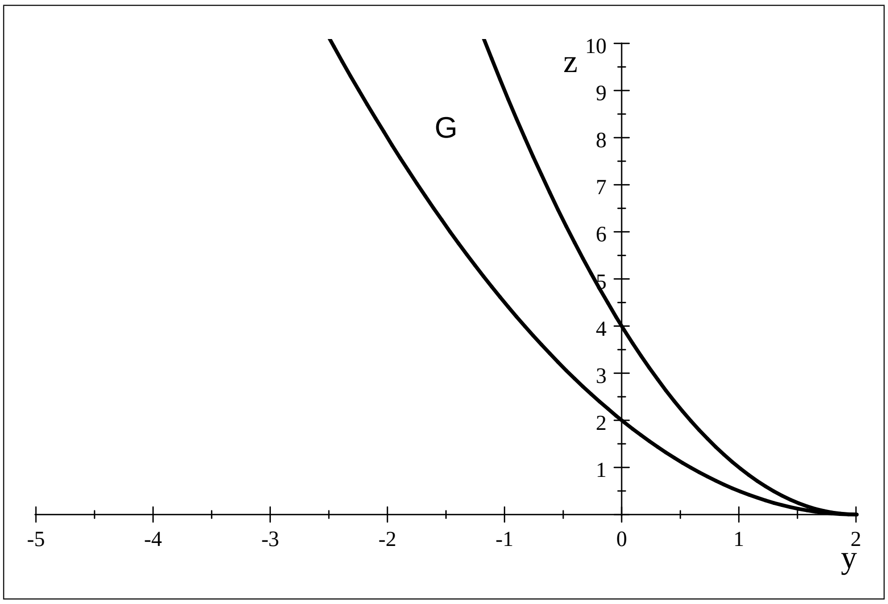


Ezekután már nem lesz nehéz megtalálni az y és z kapcsolatát, tehát arra a kérdésre a választ, hogy különböző y értékekhez milyen z értékek tartoznak? Könnyen meghatározhatjuk egy adott y értékhez a $z = x_1^2+x_2^2$ mennyiség legkisebb és legnagyobb értékét. Azt kell csupán megállapítani, hogy az egyenes szakasz melyik pontja van legközelebb, ill. legtávolabb az origóhoz.

A legközelebbi pont a szakasz felezőpontja: $x_1 = x_2 = \frac{2-y}{2}$, ekkor $z = x_1^2+x_2^2 = \frac{1}{2}(2-y)^2$.

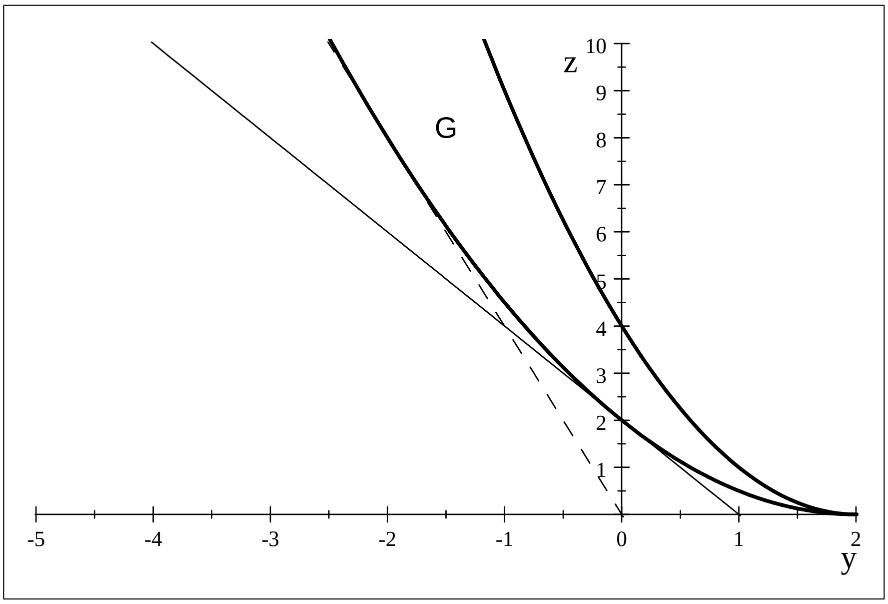
A legtávolabbi pontok a szakasz végpontjai: $x_1 = 2-y, x_2 = 0$, ill. $x_1 = 0, x_2 = 2-y$, ekkor $z = x_1^2+x_2^2 = (2-y)^2$.

Az alábbi ábrában lévő két parabola különböző y értékek esetén mutatja a z érték legkisebb és legnagyobb értékét. A parabolák közti tartomány pedig a keresett G halmaz.



A primál feladatot geometriailag megoldani annyit tesz, mint megkeresni a G halmaz azon pontját, ahol $y \leqq 0$ és z minimális. A primál optimális megoldás: $y = 0,\ z = 2$, ez a pont pedig az $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 1$ primál megoldás leképezése, a primál optimumérték $f_{\min} = z = 2$.

A duál feladat geometriai megoldásához először egy adott $u \geqq 0$ esetén a $z+uy$ függvény minimumát kell meghatározni a G halmazon. Egy bizonyos α függvényértékhez a $-u$ meredekségű $z + uy = \alpha$ egyenes (balról lefelé futó) tartozik. Mint tudjuk a $\Theta(u)$ értékét úgy kapjuk, hogy a $z + uy$ Lagrange függvényt minimalizáljuk a G halmazon. Ha az egyenest párhuzamosan eltoljuk lefelé, akkor $z+uy$ függvény csökkenni fog, viszont a G tartományban kell maradni, ezért csak a G tartomány **alsó határgörbéjéig** tolhatjuk. Tehát egy adott u értékhez meg kell keresni, hogy a $-u$ meredekségű egyenes hol érinti a G tartomány alsó határgörbéjét. Az érintési pontokhoz tartozó y és z értékkel határozhatjuk meg az adott u-hoz tartozó $\Theta(u)$ értéket a $\Theta(u) = z + uy$ képlettel. Minden $u \geqq 0$ értékre más-más meredekségű egyenest kapunk, amelyek érintési pontjából számíthatjuk $\Theta(u)$ értékét. Mivel az érintőegyenes minden pontjában azonos a $\Theta(u) = z + uy$ érték, így az $y = 0$ helyen vett z érték is ugyanazt a $\Theta(u)$ értéket szolgáltatja. Tehát a $\Theta(u)$ értékét az érintőegyenesnek a z tengelyből lemetszett szakasza adja. Az alábbi ábrában a szaggatottan rajzolt érintőegyenes az $u = 4$ értékhez tartozik.



A duál feladat mint ismeretes nem más mint meghatározni azt az $u \geqq 0$ értéket, amelynél a $\Theta(u)$ duál célfüggvény a legnagyobb. Ez geometriailag azt jelenti, hogy a G halmazt alulról érintő érintőegyenesek közül azt kell meghatározni, amely a z tengelyből a legnagyobbat metszi le. A fenti ábrából kiolvasható, hogy az $y = 0$ és a $z = 2$ pontbeli érintőegyeneshez (vékonyan rajzolt egyenes) tartozó meredekség lesz az optimális megoldás, azaz $\bar{u} = 2$, $\Theta_{\max} = 2$.

Feladat:
Határozza meg az előző optimalizálási feladat Lagrange duál feladatát és optimális megoldását!

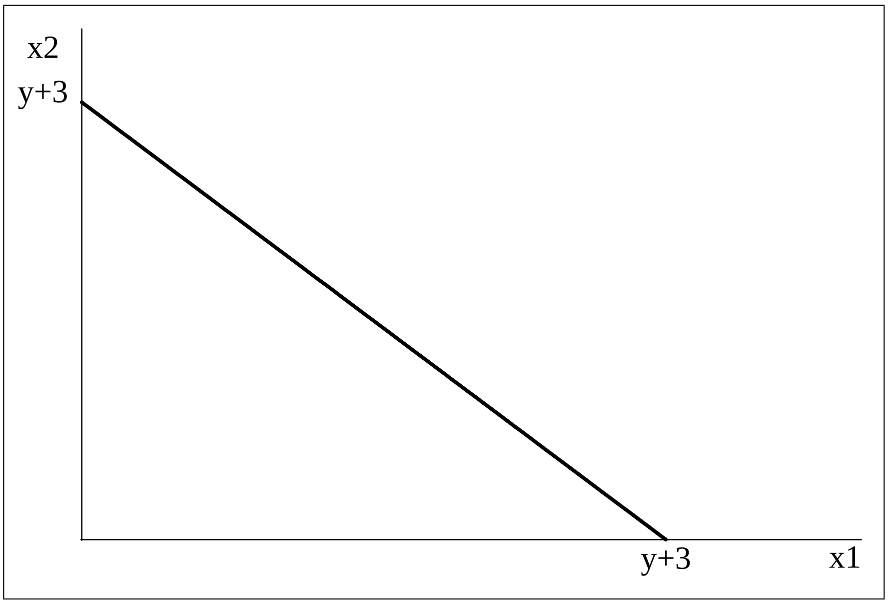
11. példa
Tekintsük a 10. példában szereplő optimalizálási feladatot!

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \to \min! \\ h(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ X &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geqq 0\right\} \end{aligned}$$

Megoldás:
Az (y, z) síkra képezzük le az X halmazt az alábbiak szerint: Minden $\mathbf{x} \in X$ ($\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$) vektornak az (y, z) síkon megfeleltetünk egy pontot, úgy hogy az y abszcissza a feltételi függvény értékét, a z ordináta pedig a célfüggvény értékét kapja, így keletkezik egy H halmaz, amely képletben az alábbiak szerint írható:

$$H = \left\{(y, z) : y = x_1 + x_2 - 3,\ z = x_1^2 + x_2^2,\ x_1, x_2 \geqq 0\right\}$$

Ahhoz, hogy a H halmazt meghatározzuk, azaz az y és z kapcsolatát megállapítsuk, célszerű először ábrázolni az (x_1, x_2) sík X tartományában az x_1, x_2 és az y kapcsolatát. Az összefüggés: $x_1 + x_2 = y + 3$ és $x_1, x_2 \geqq 0$, így $y \geqq -3$. A kapcsolat az (x_1, x_2) síkon egy egyenes szakasszal jellemezhető. Különböző y értékekhez párhuzamos egyenes szakaszok tartoznak. Az alábbi ábra egy adott $y \geqq -3$ értékhez tartozó egyenes szakaszt ábrázol, az $y = -3$ értékhez az origó tartozik.

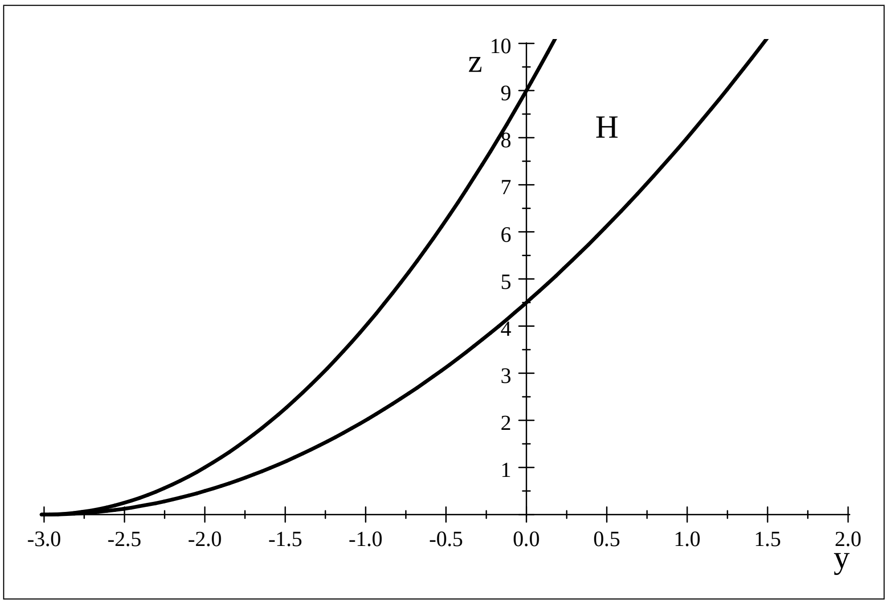


Ezekután egyszerű megtalálni az y és z kapcsolatát. Könnyen meghatározhatjuk egy adott y értékhez a $z = x_1^2 + x_2^2$ mennyiség legkisebb és legnagyobb értékét. Azt kell csupán megállapítani, hogy az egyenes szakasz melyik pontja van legközelebb, ill. legtávolabb az origóhoz.

A legközelebbi pont a szakasz felezőpontja: $x_1 = x_2 = \frac{y+3}{2}$, ekkor a $z = x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}(y+3)^2$.

A legtávolabbi pontok a szakasz végpontjai: $x_1 = y + 3, x_2 = 0$, ill. $x_1 = 0, x_2 = y + 3$, ekkor $z = x_1^2 + x_2^2 = (y + 3)^2$.

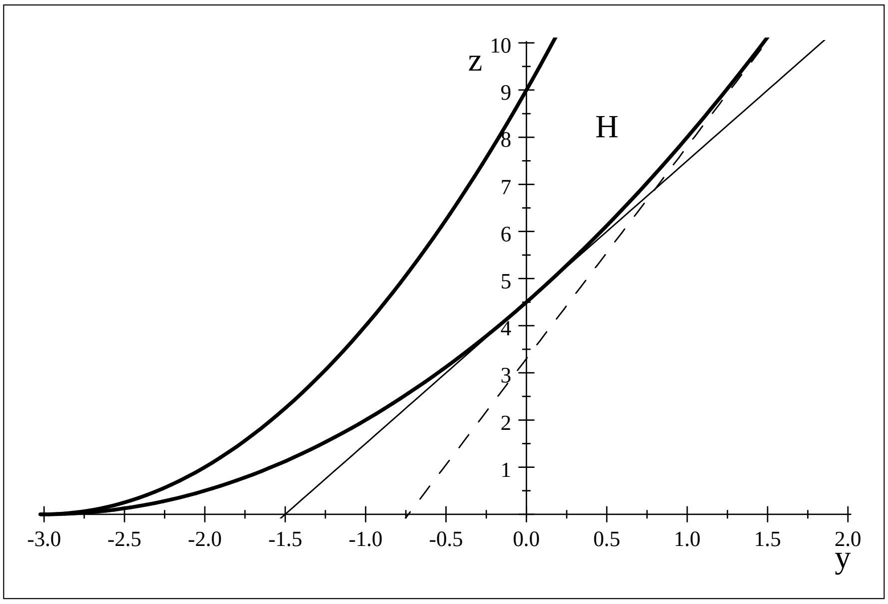
Az alábbi ábrában lévő két parabola különböző y értékek esetén mutatja a z érték legkisebb és legnagyobb értékét. A parabolák közti tartomány pedig a H halmaz.



A primál feladatot geometriailag megoldani annyit tesz, mint megkeresni a H halmaz azon pontját, ahol $y = 0$ és z minimális. A primál optimális megoldás: $y = 0,\ z = 4.5$, ez a pont pedig az $\bar{x}_1 = 1.5, \bar{x}_2 = 1.5$ primál megoldás leképezése, a primál optimumérték $f_{\min} = z = 4.5$.

A duál feladat geometriai megoldásához először egy adott $v \in \mathbb{R}$ esetén a $z + vy$ függvény minimumát kell meghatározni a H halmazon. Egy bizonyos α függvényértékhez a $-v$ meredekségű $z + vy = \alpha$ egyenes tartozik. A $v \in \mathbb{R}$ miatt ez az egyenes tetszőleges irányú lehet.

Mint tudjuk a $\Theta(v)$ értékét úgy kapjuk, hogy a $z + vy$ Lagrange függvényt minimalizáljuk a H halmazon. Ha az egyenest párhuzamosan eltoljuk lefelé, akkor $z + vy$ függvény csökkenni fog, viszont a H tartományban kell maradni, ezért csak a H tartomány alsó határgörbéjéig tolhatjuk. Tehát egy adott v értékhez meg kell keresni, hogy a $-v$ meredekségű egyenes hol érinti a H tartomány alsó határgörbéjét. Az érintési pontokhoz tartozó y és z értékkel határozhatjuk meg az adott v-hez tartozó $\Theta(v)$ értéket a $\Theta(v) = z + vy$ képlettel. Minden $v \in \mathbb{R}$ értékre más-más meredekségű egyenest kapunk, amelyek érintési pontjából számíthatjuk $\Theta(v)$ értékét. Mivel az érintőegyenes minden pontjában azonos a $\Theta(v) = z+vy$ érték, így az $y = 0$ helyen vett z érték is ugyanazt a $\Theta(v)$ értéket szolgáltatja. Tehát a $\Theta(v)$ értékét az érintőegyenesnek a z tengelyből lemetszett szakasza adja. Az alábbi ábrában a szaggatottan rajzolt érintőegyenes az $v = 4.5$ értékhez tartozik.



A duál feladat mint ismeretes nem más mint meghatározni azt a $v \in \mathbb{R}$ értéket, amelynél a $\Theta(v)$ duál célfüggvény a legnagyobb. Ez geometriailag azt jelenti, hogy a H halmazt alulról érintő érintőegyenesek közül azt kell meghatározni, amely a z tengelyből a legnagyobbat metszi le. A fenti ábrából kiolvasható, hogy az $y = 0$ és a $z = 4.5$ pontbeli érintőegyeneshez (vékonyan rajzolt egyenes) tartozó meredekség lesz az optimális megoldás, azaz $\bar{v} = 3$, $\Theta_{\max} = 4.5$.

Feladat:
Határozza meg a 11. példában szereplő optimalizálási feladat Lagrange duál feladatát és optimális megoldását!

12. példa
Most egy olyan többváltozós primál feladatot tekintsünk, amelynek csak egyetlen egyenlőtlenségi feltétele van, tehát $g : R^n \to R$, de nem adjuk meg konkrétan az f célfüggvényt, a g feltételi függvényt és az X halmazt. Ekkor a primál feladat és annak duálisa az alábbiak szerint írható:
Primál feladat:

$$f(\mathbf{x}) \to \min!$$
$$g(\mathbf{x}) \leqq 0$$
$$\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$$

Lagrange függvény:

$$L(\mathbf{x}, u) = f(\mathbf{x}) + ug(\mathbf{x})$$

Lagrange duál feladat:

$$\Theta(u) \to \max!$$
$$u \geqq 0$$

ahol

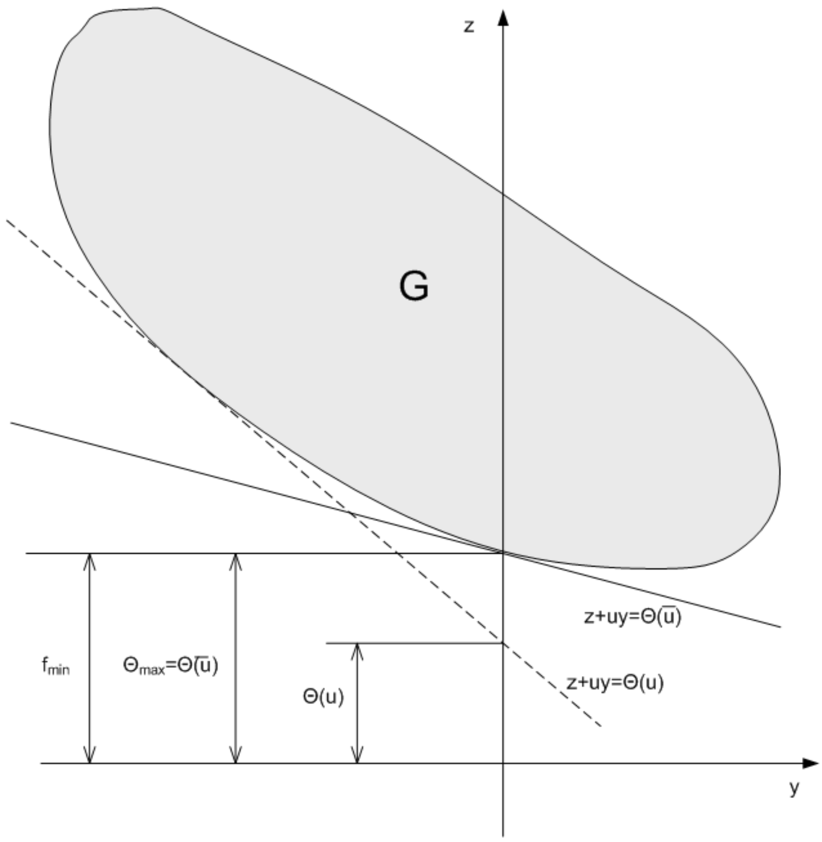
$$\Theta(u) = \inf \{f(\mathbf{x}) + ug(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in X\}$$

Az (y, z) síkra képezzük le az X halmazt az alábbiak szerint:

$$G = \{(y, z) : y = g(\mathbf{x}),\ z = f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in X\}$$

A leképezést most nem tudjuk konkrétan elvégezni mint a korábbi példákban. A leképezésnek az alábbi két esetét különböztetjük meg:

a) eset: A leképezés során az alábbi ábrán látható G halmaz adódott.

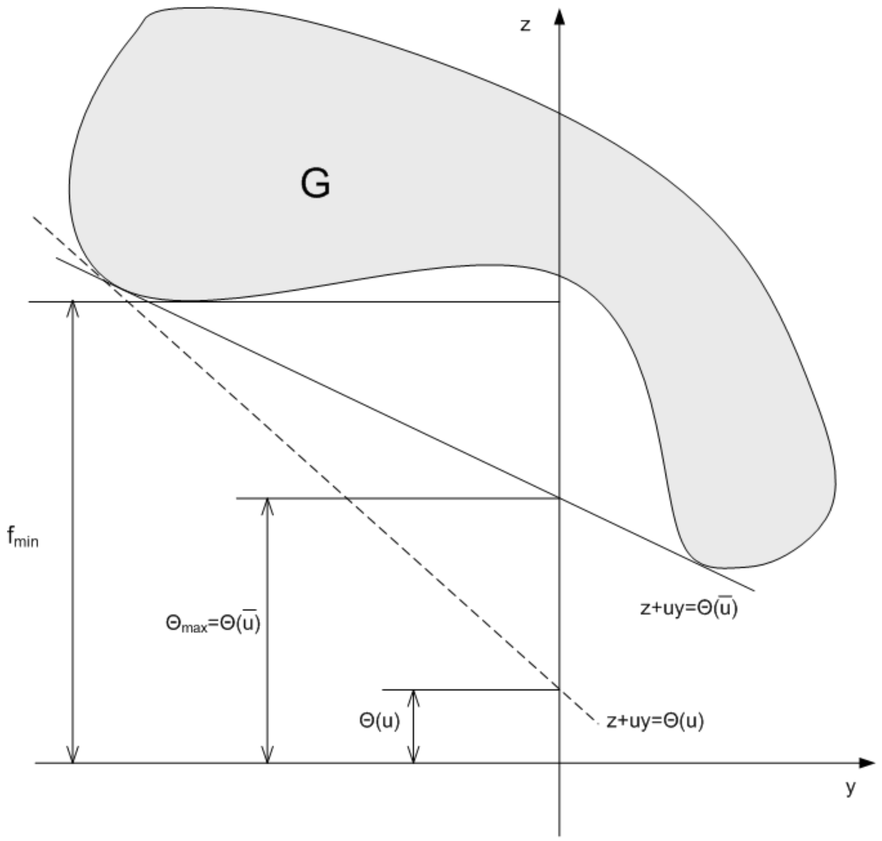


A primál feladatot geometriailag megoldani annyit tesz, mint megkeresni a G halmaz azon pontját, ahol $y \leqq 0$ és z minimális. A primál optimális megoldás az $y = 0$ helyen, a z tengely és a G halmaz alsó határgörbéjének metszéspontjánál van. A primál feladat optimális értéke $f_{\min}$.

A duál feladat geometriai megoldása: Minden $u \geqq 0$ esetén a $z + uy$ függvény minimumát kell meghatározni a G halmazon, tehát minden $u \geqq 0$ értékhez meg kell keresni azt a $-u$ meredekségű (balról lefele haladó) egyenest (szaggatottan rajzolt), amely érinti a G tartomány alsó határgörbéjét. Az érintőegyenesnek a z tengelymetszete adja a $\Theta(u)$ értéket. Az optimális érintőegyenes az lesz, amelynél a z tengelymetszet a legnagyobb. Az ábrában ez a folytonos vonallal rajzolt érintőegyenes. A duál feladat optimális értéke $\Theta_{\max}$.

Az ábrából leolvasható, hogy a két feladat célfüggvényének optimális értéke **megegyezik**.

b) eset: A leképezés során az alábbi ábrán látható G halmaz adódott.



A primál feladatot geometriailag megoldani annyit tesz, mint megkeresni a G halmaz azon pontját, ahol $y \leqq 0$ és z minimális. A primál optimális megoldás az $y \leqq 0$ tartomány azon helyén van, ahol a G halmaz alsó határgörbéje a legalacsonyabb. A primál feladat optimális értéke $f_{\min}$.

A duál feladat geometriai megoldása: Minden $u \geqq 0$ esetén a $z+uy$ függvény minimumát kell meghatározni a G halmazon, tehát minden $u \geqq 0$ értékhez meg kell keresni azt a $-u$ meredekségű (balról lefele haladó) egyenest (szaggatottan rajzolt), amely érinti a G tartomány alsó határgörbéjét. Az érintőegyenesnek a z tengelymetszete adja a $\Theta(u)$ értéket. Az optimális érintőegyenes az lesz, amelynél a z tengelymetszet a legnagyobb. Az ábrában ez a folytonos vonallal rajzolt érintőegyenes. A duál feladat optimális értéke $\Theta_{\max}$.

Az ábrából leolvasható, hogy a két feladat célfüggvényének optimális értéke **nem egyezik meg** ($f_{\min} > \Theta_{\max}$).

13. példa

Tekintsük a 8. példában adott lineáris programozási feladatot!

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2) &= -(6x_1+8x_2) \to \min!\\
g_1(x_1,x_2) &= 2x_1+3x_2-12 \leqq 0\\
g_2(x_1,x_2) &= 2-2x_1-x_2 \leqq 0\\
X &= \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1,x_2 \geqq 0\right\}
\end{aligned}$$

Megoldás:

Az optimalizálási feladat Lagrange függvénye:

$$L(x_1, x_2, u_1, u_2) = -(6x_1 + 8x_2) + u_1(2x_1 + 3x_2 - 12) + u_2(2 - 2x_1 - x_2),$$

Az (y_1, y_2, z) **térbe** képezzük le az X halmazt az alábbiak szerint:

$$G = \{(y_1, y_2, z) : y_1 = 2x_1 + 3x_2 - 12,\ y_2 = 2 - 2x_1 - x_2,\ z = -(6x_1 + 8x_2),\ x_1, x_2 \geqq 0\}$$

A G halmaz az $\mathbb{R}^3$ térben van, minden $x_1, x_2 \geqq 0$ számnak az (y_1, y_2, z) térben meg kell feleltetni egy pontot. A z és az y_1, y_2 kapcsolatának ismeretében fel is rajzolhatjuk a halmazt. A $2x_1+3x_2 = y_1+12$ és a $2x_1+x_2 = 2-y_2$ egyenletekből az x_1, x_2 kifejezhető, ha megoldjuk ezt az egyenletrendszert. A megoldás:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{y_1 + 3y_2 + 6}{4} \\ x_2 &= \frac{y_1 + y_2 + 10}{2} \end{aligned}$$

Ebből a z és az y_1, y_2 kapcsolata egyszerű helyettesítés után a következő:

$$z = -(6x_1 + 8x_2) = \frac{-5y_1 + y_2 - 62}{2}.$$

A G halmaz tehát az (y_1, y_2, z) térben egy **sík**. További vizsgálatokat a térbeli ábrázolás miatt nem végzünk. Az érdeklődő és jó térlátású olvasónak javasoljuk ezeknek az elvégzését.

Feladat:
Végezze el alábbi egyszerű lineáris programozási feladatnak és duálisának geometriai interpretálását! A geometriai viszonyok itt síkbeliek, így könnyebb a vizsgálatok elvégzése.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\rightarrow \max! \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 2 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Feladat:
Végezze el a 3. példában adott optimalizálási feladatnak és duálisának geometriai interpretálását!

3. A duál feladat konvex optimalizálási feladat

TÉTEL: **(duál célfüggvény konkáv függvény)**
Egy primál feladathoz tartozó a Lagrange duál feladat $\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ célfüggvénye az $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ és a $\mathbf{v}$ változókban **konkáv** függvény.

Bizonyítás:
Legyen $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ és $(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)$ két teszőleges $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \geqq \mathbf{0})$ duál változó vektor. Azt kell belátni, hogy két tetszőleges duál változóra igaz az alábbi egyenlőtlenség minden $0 < \lambda < 1$ esetén:

$$\Theta(\lambda(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + (1 - \lambda)(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)) \geqq \lambda\Theta(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + (1 - \lambda)\Theta(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2).$$

Induljunk ki a duál feladat célfüggvényének definíciójából és használjuk fel azt a tényt, hogy két függvény összegének infimuma nagyobb vagy egyenlő mint a két függvény infimumának összege.

$$\begin{aligned} & \Theta(\lambda(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1)+(1-\lambda)(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_2)) \\ = \; & \inf\{\lambda\,[f(\mathbf{x})+\mathbf{u}_1\mathbf{g}(\mathbf{x})+\mathbf{v}_1\mathbf{h}(\mathbf{x})]+(1-\lambda)[f(\mathbf{x})+\mathbf{u}_2\mathbf{g}(\mathbf{x})+\mathbf{v}_2\mathbf{h}(\mathbf{x}):\mathbf{x}\in X\} \\ \geqq \; & \lambda\inf\{f(\mathbf{x})+\mathbf{u}_1\mathbf{g}(\mathbf{x})+\mathbf{v}_1\mathbf{h}(\mathbf{x}):\mathbf{x}\in X\}+(1-\lambda)\inf\{f(\mathbf{x})+\mathbf{u}_2\mathbf{g}(\mathbf{x})+\mathbf{v}_2\mathbf{h}(\mathbf{x}):\mathbf{x}\in X\} \\ = \; & \lambda\Theta(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1)+(1-\lambda)\Theta(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

Q.e.d.

Vegyük észre, hogy a primál feladatban szereplő függvényekre nem tettünk előírásokat, így is konkáv függvényt kapunk a duál célfüggvényre.

A duál feladatot azért nevezzük **konvex** optimalizálási feladatnak, mert ha átírjuk minimalizálási feladatra, akkor a **minimalizálási** feladat $-\Theta(\mathbf{u},\mathbf{v})$ célfüggvénye konvex függvény.

A konvexitás fontos tulajdonság az optimalizálásban, mivel konvex függvény lokális optimuma globális is egyben. Tudjuk azt is, hogy általában a konvex függvény optimumának meghatározása is egyszerűbb, egy gond azért van a duál feladat megoldásával. A duál célfüggvényt nem mindig ismerjük explicite. Ahhoz, hogy $\Theta(\mathbf{u},\mathbf{v})$ értékét egy adott $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ helyen kiszámíthassuk, előtte el kell végezni egy minimalizálási feladatot.

14. példa

Külön példával nem mutatjuk be a duál feladat célfüggvényének konkáv tulajdonságát, csupán felidézzük az 1.-8. példákat, ahol mindegyik esetben megtapasztalhattuk azt, hogy a duál feladat egy konvex programozási feladat.

4. Dualitási tételek

A példákon már láttuk, hogy a primál és a duál feladat szoros kapcsolatban van. Ebben a fejezetben tételek ismertetésével mutatjuk be a primál és a duál feladat közötti kapcsolatot. Megismerkedünk a dualitási rés fogalmával.

4.1. Gyenge dualitási tétel

A gyenge duálitási tétel a két feladat **lehetséges megoldásaihoz** tartozó **célfüggvényértékek** között mond ki állítást.

TÉTEL (gyenge duálitási tétel)

Legyen $\mathbf{x}$ egy lehetséges megoldása a primál feladatnak, azaz $\mathbf{x}\in S$, részletezve $\mathbf{x}\in X$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})\leqq\mathbf{0}$, $\mathbf{h}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$. Legyen $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ egy lehetséges megoldása a Lagrange duál feladatnak, azaz $\mathbf{u}\geqq\mathbf{0}$. Ekkor a két feladat célfüggvényértéke között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$f(\mathbf{x})\geqq\Theta(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

Bizonyítás:

A bizonyítás során a $\Theta(\mathbf{u},\mathbf{v})$ függvény definíciójából indulunk ki, majd sorra felhasználjuk a primál és a duál feltételeket, így kapjuk, hogy

$$\Theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \inf\{f(\mathbf{y}) + \mathbf{ug}(\mathbf{y}) + \mathbf{vh}(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in X\} \leqq f(\mathbf{x}) + \mathbf{ug}(\mathbf{x}) + \mathbf{vh}(\mathbf{x}) \leqq f(\mathbf{x}),$$

ugyanis $\mathbf{ug}(\mathbf{x}) \leqq 0$, mert $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0}$, ill. $\mathbf{vh}(\mathbf{x}) = 0$, mert $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Q.e.d.

Az alábbiakban e tételnek négy következményét ismertetjük, amelyek közül az elsőt bizonyítjuk be, a többi bizonyítását az olvasóra bízzuk.

4.2. A gyenge dualitási tétel következményei

1. következmény

Ha az $\bar{\mathbf{x}}$ primál lehetséges megoldás, az $(\bar{\mathbf{u}},\bar{\mathbf{v}})$ duál lehetséges megoldás és a két feladat célfüggvényének értéke megegyezik, azaz

$$f(\bar{\mathbf{x}}) = \Theta(\bar{\mathbf{u}},\bar{\mathbf{v}}),$$

akkor az $\bar{\mathbf{x}}$ a primál feladat optimális megoldása, az $(\bar{\mathbf{u}},\bar{\mathbf{v}})$ pedig a duál feladat optimális megoldása.

Bizonyítás:

Tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{x} \in S$ primál lehetséges megoldást. Ekkor az $\mathbf{x}$ és az $(\bar{\mathbf{u}},\bar{\mathbf{v}})$ primál, ill. duál lehetséges megoldásokra igaz a gyenge dualitási tétel, azaz

$$f(\mathbf{x}) \geqq \Theta(\bar{\mathbf{u}},\bar{\mathbf{v}}) \quad \text{minden } \mathbf{x} \in S \text{ esetén.}$$

A feltételezés szerint $\Theta(\bar{\mathbf{u}},\bar{\mathbf{v}}) = f(\bar{\mathbf{x}})$, ebből pedig adódik, hogy

$$f(\mathbf{x}) \geqq f(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{minden } \mathbf{x} \in S \text{ esetén,}$$

ami szerint az $\bar{\mathbf{x}}$ primál lehetséges megoldás a primál feladat optimális megoldása. Hasonlóan bizonyítható az $(\bar{\mathbf{u}},\bar{\mathbf{v}})$ duál megoldás optimalitása is, amelyet az olvasóra bízunk.

Q.e.d.

2. következmény

$$\inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0},\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in X\} \geqq \sup\{\Theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) : \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\}$$

3. következmény

Ha

$$\inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq 0,\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in X\} = -\infty,$$

akkor

$$\Theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\infty \quad \text{minden } \mathbf{u} \geqq \mathbf{0} \text{ esetén.}$$

4. következmény

Ha

$$\sup\{\Theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) : \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\} = +\infty,$$

akkor a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása.

4.3. A dualitási rés fogalma

A gyenge dualitási tétel 1. következménye szerint, ha $f(\bar{\mathbf{x}}) = \Theta(\bar{\mathbf{u}})$, akkor $\bar{\mathbf{x}}$ és $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ lehetséges megoldások optimális megoldások. Ez fordítva nem mindig igaz, tehát egy optimális megoldáspárra a két célfüggvény optimális értéke nem mindig egyenlő egymással. Ezt a tényt több példánál is megtapasztaltuk.

Amennyiben a primál és a duál célfüggvény optimális értéke különbözik, azaz $f(\bar{\mathbf{x}}) > \Theta(\bar{\mathbf{u}})$, akkor **dualitási résről** beszélünk.

4.4. Konvex Farkas-Minkowski tétel

A Lagrange dualitás fő tételének, az erős dualitási tételnek bizonyítása során felhasználjuk az alábbi konvex Farkas-Minkowski tételt, amelynek bizonyításától azonban eltekintünk.

TÉTEL (konvex Farkas-Minkowski tétel)
Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nemüres konvex halmaz, $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ konvex függvények, $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ affin függvény, azaz $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$. Tekintsük az alábbi két rendszert:

$$\begin{aligned}
&\text{1. rendszer:}\quad \alpha(\mathbf{x}) < 0,\quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0},\quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\quad \mathbf{x} \in X \\
&\text{2. rendszer:}\quad u_0\alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{u}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}\mathbf{h}(\mathbf{x}) \geqq 0,\quad \mathbf{x} \in X,\ (u_0, \mathbf{u}) \geqq \mathbf{0},\ (u_0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Az alábbi két állítás közül egyik és csakis egyik teljesül:
Ha az 1. rendszernek nincs $\mathbf{x}$ megoldása, akkor a 2. rendszernek van $(u_0, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ megoldása.
Ha a 2. rendszernek van olyan $(u_0, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ megoldása, hogy $u_0 > 0$, akkor az 1. rendszernek nincs $\mathbf{x}$ megoldása.

15. példa
Tekintsük a jól ismerjük a Farkas tételt, amely a következő:
Legyen adott egy $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix és egy m elemű $\mathbf{b}$ vektor. Tekintsük az alábbi két rendszert:

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$	$\mathbf{y}\mathbf{A} \leqq \mathbf{0}$
$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$	$\mathbf{y}\mathbf{b} > 0$

Ekkor az alábbi két rendszer közül egyiknek és csak egyiknek van megoldása.
Vezessük le ezt a tételt a konvex Farkas-Minkowski tételből!
Legyen a konvex Farkas-Minkowski tétel jelölései szerinti X halmaz és függvények az alábbiak:

$$X = \mathbb{R}^m,\quad \alpha(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}\mathbf{b},\quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{A} \leqq \mathbf{0}$$

A halmazra és a függvényekre a linearitás miatt az előírások fennállnak és $u_0 = 1$ értékre választható. A két rendszer az alábbi:

$$\begin{aligned}
&\text{1. rendszer:}\quad -\mathbf{x}\mathbf{b} < 0,\quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{A} \leqq \mathbf{0},\quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \\
&\text{2. rendszer:}\quad -\mathbf{x}\mathbf{b} + \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{u} \geqq 0,\quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m,\quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

A 2. rendszer $(\mathbf{x}\mathbf{b} + \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{u} \geqq \mathbf{0})$ vizsgálata: Az $\mathbf{x}(-\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{u})$ akkor és csak akkor lehet nemnegatív minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ vektorra, ha $-\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Így a 2. rendszer $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b},\ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ alakra módosul. Ebből pedig kiolvasható a Farkas tétel, csupán abban más betükkel jelöltük a vektorokat.

4.5. Erős dualitási tétel

Az erős dualitási tétel arra ad választ, hogy milyen feltételek esetén **nincs dualitási rés**. Ezt az erős dualitási tételben mondjuk ki, amelyet be is bizonyítunk. A bizonyítás során felhasználjuk a konvex Farkas-Minkowski tételt.

TÉTEL (erős dualitási tétel)
Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nemüres konvex halmaz, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ konvex függvények, $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ affin függvények, azaz $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$. Tegyük fel, hogy érvényes az alábbi **regularitási feltétel**: létezik olyan $\hat{\mathbf{x}} \in X$, amelyre

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) &< \mathbf{0},\ \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \text{ és} \\ \mathbf{0} &\in \mathit{int}\, \mathbf{h}(X),\ \text{ahol } \mathbf{h}(X) = \{\mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\} \end{aligned}$$

(a) Ekkor a primál célfüggvény infimuma és a duál célfüggvény szuprémuma megegyezik, azaz
$$\inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0},\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in X\} = \sup\{\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\}.$$

(b) Továbbá, ha az infimum véges, akkor a $\sup\{\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\}$ eléretik valamely $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ pontban, amelynél $\bar{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0}$, tehát ekkor a primál célfüggvény **véges infimuma** és a duál célfüggvény **maximuma** megegyezik, azaz
$$\inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0},\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in X\} = \max\{\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\}.$$

(c) Továbbá, ha az infimum eléretik valamely $\bar{\mathbf{x}}$ pontban, akkor $\bar{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ és ekkor a primál célfüggvény **minimuma** és a duál célfüggvény **maximuma** megegyezik, azaz
$$\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0},\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in X\} = \max\{\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\},$$
vagyis **nincs dualitási rés**, mivel
$$f(\bar{\mathbf{x}}) = \Theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}).$$

Bizonyítás
Legyen φ a primál feladat célfüggvényének **infimuma** a primál feltételi halmazon, azaz
$$\varphi = \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0},\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in X\}.$$
A gyenge dualitási tétel 4. következméye szerint $\varphi = +\infty$ nem lehetséges, hiszen ekkor a primál feltételi halmaz üres lenne. Két esetet fogunk megvizsgálni.

Első esetben $\varphi = -\infty$. Ekkor a gyenge dualitási tétel 3. következméye szerint $\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\infty$ minden $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ esetén, így a tétel állítása igaz.

Második esetben φ **véges érték**. A φ definíciója miatt $f(\mathbf{x}) \geqq \varphi$, így a következő rendszernek **nincs megoldása**
$$f(\mathbf{x}) - \varphi < 0,\quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0},\quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\quad \mathbf{x} \in X.$$
Ekkor alkalmazható a konvex Farkas-Minkowski tétel, hisz $f(\mathbf{x}) - \varphi$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ konvex függvények, $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ affin függvény, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nemüres konvex halmaz. A konvex Farkas-Minkowski tétel szerint létezik olyan $(u_0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$, $(u_0, \mathbf{u}) \geqq \mathbf{0}$ vektor, hogy
$$u_0(f(\mathbf{x}) - \varphi) + \mathbf{u}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}\mathbf{h}(\mathbf{x}) \geqq 0 \quad \text{minden } \mathbf{x} \in X \text{ esetén.}$$

Először megmutatjuk, hogy $u_0 > 0$. Ezt indirekt módon végezzük. Tegyük fel, hogy $u_0 = 0$. Az első regularitási feltétel miatt létezik olyan $\hat{\mathbf{x}} \in X$, amelyre $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) < \mathbf{0}$, $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. Mivel a fenti összefüggés minden $\mathbf{x} \in X$-re igaz, így igaz az $\hat{\mathbf{x}} \in X$-re is. Behelyettesítve $\hat{\mathbf{x}}$-t és figyelembe véve, hogy a feltevés szerint $u_0 = 0$, összefüggésünk az alábbira egyszerűsödik:

$$\mathbf{ug}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{vh}(\hat{\mathbf{x}}) \geqq 0.$$

Ez $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ miatt $\mathbf{ug}(\hat{\mathbf{x}}) \geqq 0$ egyenlőtlenségre redukálódik. Másrészt az $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) < \mathbf{0}$ miatt $\mathbf{ug}(\hat{\mathbf{x}}) \leqq 0$, e kettő csak akkor állhat fenn, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Így marad az, hogy

$$\mathbf{vh}(\mathbf{x}) \geqq 0 \quad \text{minden } \mathbf{x} \in X \text{ esetén.}$$

A második regularitási feltétel szerint $\mathbf{0} \in int\ \mathbf{h}(X)$, ami azt jelenti, hogy a $\mathbf{h}(X)$ halmaz belseje tartalmazza az origót, így az origó tetszőleges környezete is eleme a $\mathbf{h}(X)$-nek, ebből pedig következik, hogy a $\mathbf{h}$ vektor biztosan megválasztható úgy, hogy az a v_i Lagrange szorzók által alkotott $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ vektor irányával ellentétesen mutasson, azaz $\mathbf{h} = -\lambda\mathbf{v}$, ahol $\lambda > 0$. Ekkor pedig

$$\mathbf{vh}(\mathbf{x}) = -\lambda\mathbf{v}^2 \geqq 0.$$

Ez pedig csak akkor állhat fenn, ha a $\mathbf{v}$ vektor zérus. Eljutottunk tehát oda, hogy $u_0 = 0$ esetén az összes Lagrange szorzó zérus, ami az $(u_0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ előírás miatt nem lehetséges. Tehát u_0 nem lehet zérus, csak pozitív, ekkor pedig végigosztható az eredeti egyenlőtlenség u_0-al, amely rendezés után

$$f(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{v}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) \geqq \varphi \quad \text{minden } \mathbf{x} \in X \text{ esetén,}$$

ahol $\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{u_0}\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{u_0}\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$. Ebből az összefüggésből pedig az is írható, hogy

$$\inf\{f(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{v}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\} \geqq \varphi.$$

A fenti összefüggés baloldala definíció szerint $\Theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$, így

$$\varphi \leqq \Theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}).$$

A gyenge dualitási tétel 2. következménye szerint igaz, hogy

$$\inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0},\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in X\} \geqq \sup\{\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\}.$$

E két utóbbi összefüggésből, figyelembe véve, hogy az utóbbi baloldalán éppen a bizonyítás elején definiált φ szerepel, írható, hogy

$$\sup\{\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\} \leqq \varphi \leqq \Theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}),$$

vagyis

$$\sup\{\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\} \leqq \Theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}).$$

Tudjuk viszont azt, hogy

$$\sup\{\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\} \geqq \Theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}),$$

amely szerint

$$\Theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = \max\{\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\},$$

tehát az $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ vektor nem más mint a duál célfüggvény **maximumpontja**.

A $\sup\{\Theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) : \mathbf{u} \geq 0\} \leqq \varphi \leqq \Theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ összefüggésből

$$\varphi = \Theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = \max\{\Theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) : \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\},$$

így **véges primál infimum** esetén az alábbi állítás igaz

$$\inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq 0,\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in X\} = \max\{\Theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) : \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\}.$$

Most tegyük fel, hogy az infimum eléretik valamely $\bar{\mathbf{x}}$ lehetséges primál megoldásnál, azaz az $f(\mathbf{x})$ primál célfüggvénynek van **minimuma** és $f(\bar{\mathbf{x}}) = \varphi$. Ekkor az $f(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{v}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) \geqq \varphi$ összefüggés, amely minden $\mathbf{x} \in X$-re igaz, igaz az $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \in S$-re is, így

$$f(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{v}}\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) \geqq \varphi.$$

A fenti és az $f(\bar{\mathbf{x}}) = \varphi$ összefüggés összevetéséből következik, hogy $\bar{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ és

$$\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0},\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\ \mathbf{x} \in X\} = \max\{\Theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) : \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}\},$$

egyszerűbben írva

$$f(\bar{\mathbf{x}}) = \Theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}).$$

Q.e.d.

16. példa

Vizsgáljuk meg az 1.-8. példákat, állapítsuk meg, hogy a bennük szereplő X halmaz, $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$, $h(\mathbf{x})$ függvények tulajdonságait, valamint a regularitási feltétel fennállását és a dualitási rés létezését. Az erős dualitási tétel feltételrendszere alapján mit mondhatunk a dualitási rés létezéséről, ill. nem létezéséről?

példa	X	$f(\mathbf{x})$	$g(\mathbf{x})$	$h(\mathbf{x})$	reg. felt.	dualitási rés
1.1.	konvex	konvex	konvex	affin	teljesül	nincs
1.2.	konvex	konvex	konvex	-	teljesül	nincs
1.3.	konvex	konvex	-	affin	teljesül	nincs
2.	konvex	konvex	konvex	-	teljesül	nincs
3.	konvex	konvex	konvex	-	teljesül	nincs
4.	nem konvex	konvex	konvex	-	teljesül	van
5.	konvex	nem konvex	konvex	-	teljesül	van
6.	konvex	konvex	konvex	-	nem teljesül	nincs
7.	konvex	konvex	konvex	-	nem teljesül	van
8.	konvex	konvex	konvex	-	teljesül	nincs

Az 1., 2., 3., 8. példában **teljesül** az erős dualitási tétel feltételrendszere, így az erős dualitási tétel alapján **nem lehet dualitási rés**.

A 4., 5., 7. példában nem teljesül az erős dualitási tétel feltételrendszere és van dualitási rés.

A 6. példa érdekes, mert **nem teljesül** az erős dualitási tétel feltételrendszere és **még-sincs dualitási rés**. Ez nem meglepő, hiszen az erős dualitási tétel azt mondja ki, hogyha fennáll a feltételrendszer, akkor biztosan nincs dualitási rés, fordítottját nem állítja.

5. Nyeregpont tételek

Mielőtt a tételeket kimondanánk definiáljuk a Lagrange függvény nyeregpontjának fogalmát.

5.1. Lagrange függvény nyeregpontjának definíciója

Idézzük fel az $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ Lagrange függvényt, amely a célfüggvény és a feltételi függvények lineáris kombinációja:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}\mathbf{h}(\mathbf{x}).$$

Legyen $\bar{\mathbf{x}} \in X$ és $\bar{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0}$. Az $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ pontot az $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ Lagrange függvény nyeregpontjának nevezzük, ha fennáll az alábbi ún. **nyeregponti összefüggés** (egyenlőtlenség):

$$L(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \leqq L(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \quad \text{minden } \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0} \text{ esetén.}$$

A fenti összefüggés írható az alábbi formában is, hiszen ha minden $\mathbf{x} \in X,\ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ esetén fennáll, akkor fennáll az $\bar{\mathbf{x}} \in X, \bar{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0}$, tetszőleges $\bar{\mathbf{v}}$ esetén is, így

$$L(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \leqq L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \leqq L(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \quad \text{minden } \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0} \text{ esetén.}$$

Ha ez utóbbi nyeregponti összefüggést vizsgáljuk, akkor az alábbiakat állapíthatjuk meg:

a) A nyeregponti összefüggés baloldala szerint $L(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \leqq L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ minden $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ esetén. Az $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ maximalizálja az adott $\bar{\mathbf{x}} \in X$ pontbeli $L(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ Lagrange függvényt az $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ és tetszőleges $\mathbf{v}$ vektorokra.

b) A nyeregponti összefüggés jobboldala szerint $L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \leqq L(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ minden $\mathbf{x} \in X$ esetén. Az $\bar{\mathbf{x}}$ minimalizálja az adott $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ $(\bar{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0})$ pontbeli $L(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ Lagrange függvényt az X halmazon.

5.2. Nyeregpont és optimális megoldások kapcsolata

TÉTEL: (nyeregpontból következik az optimális megoldás)

Legyen $\bar{\mathbf{x}} \in X$ és $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ duál változók, ahol $\bar{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0}$.

Ha $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ nyeregpontja a Lagrange függvénynek, akkor $\bar{\mathbf{x}}$ a primál feladat optimális megoldása.

Bizonyítás

Induljunk ki a nyeregponti összefüggésből, azaz

$$L(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \leqq L(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \quad \text{minden } \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0} \text{ esetén.}$$

Ez igaz minden $\mathbf{x} \in X$-re, így igaz az $\bar{\mathbf{x}} \in X$-re is, amelyből azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{u}\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{v}\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) \leqq \bar{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{v}}\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{minden } \mathbf{u} \geqq \mathbf{0} \text{ esetén.}$$

Az egyenlőtlenség jobboldala fix érték, a baloldal csak akkor lehet kisebb vagy egyenlő ennél a fix értéknél minden $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ és tetszőleges $\mathbf{v}$ esetén, ha $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \leqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\bar{\mathbf{x}} \in S$, azaz $\bar{\mathbf{x}}$ lehetséges primál megoldás.

Most szintén induljunk ki a nyeregponti összefüggésből, amelyről tudjuk, hogy igaz minden $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ és tetszőleges $\mathbf{v}$ esetén, így igaz az $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ vektorokra is, ekkor azt kapjuk, hogy

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leqq f(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{v}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad \text{minden } \mathbf{x} \in X \text{ esetén.}$$

Ha $\mathbf{x} \in S$, akkor $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, így $\bar{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq 0$, $\bar{\mathbf{v}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$. Eszerint a jobboldal $\leqq f(\mathbf{x})$, így az írható, hogy

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leqq f(\mathbf{x}) \quad \text{minden } \mathbf{x} \in S \text{ esetén.}$$

Előzőekben láttuk, hogy $\bar{\mathbf{x}}$ kielégíti a primál feltételeket, így $\bar{\mathbf{x}} \in S$, a legutóbbi összefüggés pedig azt fejezi ki, hogy az $\bar{\mathbf{x}}$ a primál feladat optimális megoldása. **Q.e.d.**

TÉTEL: (optimális megoldásból következik a nyeregpont)
Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nemüres konvex halmaz, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ konvex függvények, $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ affin függvények, azaz $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$. Tegyük fel, hogy érvényes az alábbi **regularitási feltétel**: létezik olyan $\hat{\mathbf{x}} \in X$, amelyre

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) &< \mathbf{0},\ \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \text{ és} \\ \mathbf{0} &\in \mathit{int}\, \mathbf{h}(X),\ \text{ahol } \mathbf{h}(X) = \{\mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\} \end{aligned}$$

Ha $\bar{\mathbf{x}}$ a primál feladat optimális megoldása, akkor létezik olyan $\bar{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0}$ és tetszőleges $\bar{\mathbf{v}}$ vektor, hogy $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ nyeregpontja a Lagrange függvénynek.

Bizonyítás
Az $\bar{\mathbf{x}} \in S$ a primál feladat optimális megoldása, ami azt jelenti, hogy nincs olyan $\mathbf{x} \in S$, hogy $f(\mathbf{x}) < f(\bar{\mathbf{x}})$, azaz a következő rendszernek **nincs megoldása**

$$f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}) < 0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in X.$$

Ekkor alkalmazható a konvex Farkas-Minkowski tétel, hisz $f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ konvex függvények, $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ affin függvény, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nemüres konvex halmaz. Az erős dualitási tétel bizonyításában beláttuk, hogy a regularitási feltétel esetén $u_0 > 0$, így $u_0 = 1$-re választható. Ezt figyelembe véve a konvex Farkas-Minkowski tétel szerint létezik olyan $\bar{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^k$ vektor, hogy

$$f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{v}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) \geqq 0 \quad \text{minden } \mathbf{x} \in X \text{ esetén.}$$

Mivel $\bar{\mathbf{x}} \in S$, így $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \leqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. Ekkor $\mathbf{u}\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \leqq \mathbf{0}$ minden $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{v}\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ minden $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén, így $\mathbf{u}\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}})+\mathbf{v}\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) \leqq 0$ minden $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ vektorra. Ezt felhasználva az előző egyenlőtlenség a következőképpen írható:

$$f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{v}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) \geqq 0 \geqq \mathbf{u}\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{v}\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{minden } \mathbf{x} \in X \text{ és } \mathbf{u} \geqq \mathbf{0} \text{ és } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k \text{ esetén.}$$

Ebből pedig rendezés után az alábbi egyenlőtlenség adódik:

$$f(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{v}}\mathbf{h}(\mathbf{x}) \geqq f(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{u}\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{v}\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{minden } \mathbf{x} \in X \text{ és } \mathbf{u} \geqq \mathbf{0} \text{ és } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k \text{ esetén.}$$

A fenti egyenlőtlenség nem más mint a nyeregponti összefüggés, azaz

$$L(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \leqq L(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \quad \text{minden } \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0} \text{ esetén,}$$

tehát az $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ a Lagrange függvény nyeregpontja. **Q.e.d.**

A fenti két tétel a Lagrange függvény nyeregpontja és a primál feladat optimális megoldása között mond ki fontos összefüggést. A két tétel összefoglalva a következőt fejezi ki: Annak, hogy egy $\bar{\mathbf{x}} \in X$ vektor optimális megoldása legyen a primál feladatnak szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzen olyan $\bar{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0}$ és tetszőleges $\bar{\mathbf{v}}$ vektor, hogy $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ nyeregpontja a Lagrange függvénynek. Azért választottuk szét ezt a tételt, hogy jobban érzékeltessük azt, hogy az elégséges feltételnél (nyeregpont $\Longrightarrow$ optimum) nem írunk elő a primál feladat adataira különösebb tulajdonságokat, míg a szükséges feltételnél (optimum $\Longrightarrow$ nyeregpont) a konvexitási, sőt a regularitási tulajdonság is kell.

5.3. Nyeregpont és KKT pont kapcsolata

Az alábbi tétel a Lagrange függvény nyeregpontja és a Karush-Kuhn-Tucker pont kapcsolatát mutatja be. Ebben a tételben - a KKT pont természete miatt - feltesszük a primál feladatban szereplő függvények differenciálhatóságát.

TÉTEL: (nyeregpont és KKT pont kapcsolata)
Tekintsük az alábbi matematikai programozási feladatot:

$$\begin{array}{ll} f(\mathbf{x}) \rightarrow \min! & \\ g_i(\mathbf{x}) \leqq 0 & i = 1, 2, \ldots, m \\ h_i(\mathbf{x}) = 0 & i = 1, 2, \ldots, k \\ \mathbf{x} \in X & \end{array}$$

Idézzük a feladathoz tartozó KKT feltételeket: Az $\bar{\mathbf{x}} \in S$ teljesíti a Karush-Kuhn-Tucher feltételeket, ha létezik $\bar{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0}$ és $\bar{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^k$ (Lagrange szorzók) úgy, hogy

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{u}} \nabla \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{v}} \nabla \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) &= \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{u}} \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) &= 0 \end{aligned}$$

(a) Legyen $\bar{\mathbf{x}} \in S$. Tegyük fel, hogy $f, g_i\ i \in I$ függvények konvexek az $\bar{\mathbf{x}}$ pontban, ahol I az aktív feltételek indexhalmaza, azaz $I = \{i : g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$. Tegyük fel továbbá, hogy h_i affin függvények, ha $\bar{v}_i \neq 0$. Tegyük fel, hogy $\bar{\mathbf{x}} \in S$ teljesíti a Karush-Kuhn-Tucher feltételeket.
Ekkor az $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ nyeregpontja a Lagrange függvénynek.

(b) Fordítva, legyen $\bar{\mathbf{x}} \in int\ X$ és $\bar{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0}$. Tegyük fel, hogy $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ nyeregpontja a Lagrange függvénynek.
Ekkor $\bar{\mathbf{x}}$ lehetséges primál megoldás és az $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ pedig teljesíti a KKT feltételeket.

Bizonyítás
(a) Induljunk ki abból, hogy $\bar{\mathbf{x}} \in S$. A függvényekre előírt konvexitási és affinitási tulajdonságok miatt a következők írhatók minden $\mathbf{x} \in X$ esetén:

$$\begin{array}{ll} f(\mathbf{x}) \geqq f(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) & \\ g_i(\mathbf{x}) \geqq g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) & i \in I \\ h_i(\mathbf{x}) = h_i(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla h_i(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) & \forall i,\ \bar{v}_i \neq 0 \end{array}$$

Szorozzuk be a második típusú egyenlőtlenségeket $\bar{u}_i \geqq 0$, az egyenlőségeket pedig $\bar{v}_i \neq 0$ Lagrange szorzókkal, majd összegezzük ezeket és adjuk hozzá az első egyenlőtlenséget, ekkor minden $\mathbf{x} \in X$ esetén az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}) + \sum_{i \in I} \bar{u}_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{\bar{v}_i \neq 0} \bar{v}_i h_i(\mathbf{x}) \\ \geqq \; & f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} \bar{u}_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{\bar{v}_i \neq 0} \bar{v}_i h_i(\bar{\mathbf{x}}) \\ & + \left(\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} \bar{u}_i \boldsymbol{\nabla} g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{\bar{v}_i \neq 0} \bar{v}_i \boldsymbol{\nabla} h_i(\bar{\mathbf{x}}) \right) (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség baloldalát kiegészíthetjük a nem szereplő zérus Lagrange szorzókkal, így a baloldal $L(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$. Mivel az $\bar{\mathbf{x}} \in S$ teljesíti a KKT feltételeket, így a jobboldal utolsó tagja zérus. A jobboldal második tagja a KKT feltétel miatt zérus, a harmadik tagja pedig a $h_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ miatt zérus, így a jobboldal $f(\bar{\mathbf{x}})$. Ha hozzáadjuk ehhez az $\mathbf{ug}(\bar{\mathbf{x}})+\mathbf{vh}(\bar{\mathbf{x}})$ mennyiséget, ami minden $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén nempozitív, akkor az új jobboldal $L(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$. Ekkor írható, hogy

$$L(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \geqq L(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{minden } \mathbf{x} \in X, \ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0} \text{ esetén},$$

ez pedig azt fejezi ki, hogy $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ nyeregpontja a Lagrange függvénynek.

(b) A második állítás bizonyításához induljunk ki abból, hogy $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ nyeregpontja a Lagrange függvénynek az $\bar{\mathbf{x}} \in int\ X$ és $\bar{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0}$ feltevésekkel, azaz

$$L(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \leqq L(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \quad \text{minden } \mathbf{x} \in X, \ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0} \text{ esetén}.$$

Ez igaz minden $\mathbf{x} \in X$-re, így igaz az $\bar{\mathbf{x}} \in int\ X$-re is, ekkor részletezve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{ug}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{vh}(\bar{\mathbf{x}}) \leqq \bar{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{v}}\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{minden } \mathbf{u} \geqq \mathbf{0} \text{ esetén}.$$

A jobboldal fix érték, a baloldal csak akkor lehet kisebb vagy egyenlő ennél a fix értéknél minden $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ és tetszőleges $\mathbf{v}$ esetén, ha $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \leqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\bar{\mathbf{x}} \in S$, azaz $\bar{\mathbf{x}}$ lehetséges primál megoldás.

A legutolsó egyenlőtleség igaz minden $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ és tetszőleges $\mathbf{v}$ esetén, így igaz az $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ vektorokra is, ekkor $\bar{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{v}}\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) \geqq 0$. Ebből pedig az $\bar{\mathbf{x}} \in S$ miatt $\bar{\mathbf{u}}\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ is igaz, így $\bar{\mathbf{x}} \in S$ teljesíti a KKT feltétel második részét.

Most szintén induljunk ki a nyeregponti összefüggésből, amely igaz minden $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ és tetszőleges $\mathbf{v}$ vektorra, így igaz az $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}$ vektorokra is, tehát azt kapjuk, hogy

$$L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \leqq L(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \quad \text{minden } \mathbf{x} \in X \text{ esetén}.$$

Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy az $\bar{\mathbf{x}}$ minimalizálja az $L(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ függvényt az X halmazon. Mivel $\bar{\mathbf{x}} \in int\ X$ (belső pont) és a függvények differenciálhatók, ezért az $\bar{\mathbf{x}}$ optimalitásának szükséges feltétele $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{0}$, amely részletezve

$$\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{u}} \boldsymbol{\nabla} \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{v}} \boldsymbol{\nabla} \mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}.$$

Ez pedig pontosan a KKT feltétel első részének felel meg. **Q.e.d.**

5.4. Nyeregpont és a dualitási rés kapcsolata

TÉTEL: (nyeregpont és a dualitási rés kapcsolata)
Legyen $\bar{\mathbf{x}} \in X$ és $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ duál változók, ahol $\bar{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0}$.
Az $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ akkor és csak akkor nyeregpontja a Lagrange függvénynek, ha $\bar{\mathbf{x}}$ a primál feladatnak, $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ a duál feladatnak dualitási rés nélküli optimális megoldása, azaz $f(\bar{\mathbf{x}}) = \Theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$.

Megjegyzés:
A nyeregpont és a dualitási rés kapcsolatát kimondó tétel, az erős dualitási tétel, valamint a nyeregpont és a KKT pont kapcsolatát kimondó tétel együtteséből megállapítható, hogy bizonyos feltételek esetén a **Lagrange duál feladat duál változóinak optimális értéke** egyrészt a **KKT feltételek Lagrange szorzói**, másrészt a **nyeregponti összefüggésben** szereplő $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}$ számok.

Megjegyzés:
Az olvasó bizonyára felfigyelt arra, hogy egy matematikai programozási feladatban szereplő mennyiségekre bizonyos előírásokat tettünk. Gondoljunk az erős dualitási tételre. Az optimalizálásban kitüntetett szerepe van az ún. konvex optimalizálási feladatnak. Most ezt definiáljuk. Tekintsük az alábbi matematikai programozási feladatot:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x}) \to \min! \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq 0 \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \\ \mathbf{x} \in X \end{gathered}$$

A fenti matematikai programozási feladatot **konvex optimalizálási feladatnak** nevezzük, ha X nemüres konvex halmaz, f, $\mathbf{g}$ konvex függvények, $\mathbf{h}$ affin függvények, azaz $\mathbf{h} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$.

6. Érzékenységvizsgálat

Az előző fejezetekben sok szó esett a primál és a duál feladat kapcsolatáról. Most a duál változóknak másik (nem geometriai) értelmezését adjuk meg. Két példát mutatunk be, majd egy tételben összefoglaljuk a duál változóra vonatkozó ismereteinket.

17. példa
Tekintsük az 2. példa optimalizálási feladatát, amely az alábbi

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \to \min! \\ g(x) &= 1 - x \leqq 0 \\ X &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

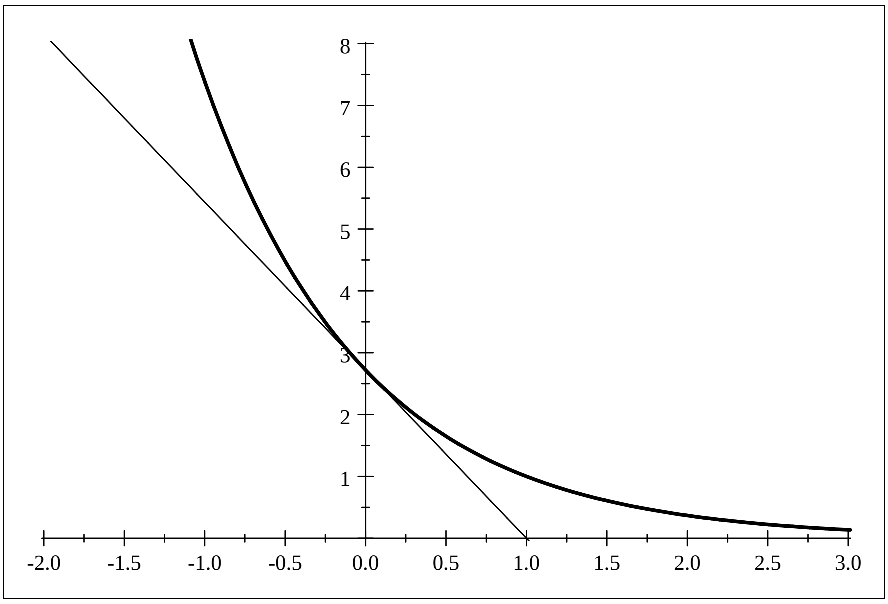
Módosítsuk, változtassuk meg a feltétel jobboldalát 0-ról $\varepsilon \in \mathbb{R}$ értékre, ekkor egy új feladatot kapunk, amely az alábbi:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \to \min! \\ g(x) &= 1 - x \leqq \varepsilon \\ X &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

A továbbiakban az első feladatot **eredeti feladatnak**, a módosítottat pedig ún. **perturbált feladatnak** fogjuk nevezni.

Megoldás:

A 9. példában az eredeti feladat Lagrange duál feladatának geometriai viszonyát vizsgáltuk. Az $X = \mathbb{R}$ halmazt leképeztük az (y, z) síkra, amely során az alábbi ábrán látható G halmazt (görbét) kaptuk. Az ábrába berajzoltuk az eredeti feladat duál feladatának optimális $\bar{u}$ megoldásához tartozó érintőegyenest is.



Az eredeti feladatot geometriailag megoldani annyit tesz, mint megkeresni a G görbe azon pontját, ahol $y \leqq 0$ és z minimális. Az optimális megoldás az $y = 0$ helyen van.

A perturbált feladatot geometriailag megoldani annyit tesz, mint megkeresni a G görbe azon pontját, ahol $y \leqq \varepsilon$ és z minimális. A perturbált feladat optimális megoldása az $y = \varepsilon$ helyen van. Az ábrából egyszerűen leolvasható. hogy ε-nál kisebb y értékekhez tartozó z értékek közül a legkisebb az ε helyen van. Tehát minden $\varepsilon \in \mathbb{R}$ értékhez a G görbe ordináta értéke adja a perturbált feladat optimális célfüggvényértékét. Jelölje $\varphi(\varepsilon)$ a perturbált feladat célfüggvényének optimális értékét, ennek a függvénynek a képe a példánkban a G görbe. Az eredeti feladat az $\varepsilon = 0$ esetnek felel meg, így az eredeti feladat optimális célfüggvényértékét a $\varphi(0)$ mennyiség adja.

Az érintőegyenes egyenlete: $z + \bar{u}y = z(0)$. Példánkban **nincs dualitási rés**, így $z(0) = \varphi(0)$. Emiatt és az $y = \varepsilon$ egyenlőség miatt írható, hogy $z = \varphi(0) - \bar{u}\varepsilon$. A G görbét leíró $\varphi(\varepsilon)$ függvény **konvex**, ebből következik, hogy a függvény görbéje minden $\varepsilon \in \mathbb{R}$ esetén az érintőegyenes **felett** halad, azaz írható, hogy

$$\varphi(\varepsilon) \geqq \varphi(0) - \bar{u}\varepsilon.$$

Ez egy fontos összefüggés, amely azt fejezi ki, hogy a perturbált feladat célfüggvényértékének $(\varphi(\varepsilon))$ és az eredeti feladat célfüggvény értékének $(\varphi(0))$ a különbsége **legalább** $-\bar{u}\varepsilon$. Más szavakkal az eredeti feladatban a feltétel **jobboldalának** ε értékű **megváltozása** az eredeti feladat **célfüggvényértékét** legalább $-\bar{u}\varepsilon$ értékkel **változtatja meg**. Tehát a **célfüggvényváltozást** kapcsolatba hoztuk az eredeti feladathoz rendelt duál feladat **duálváltozójának optimális értékével**. A duál változó optimális értékének egyfajta jelentése innen kiolvasható.

Ezzel az eredménnyel a gyakorlatban még nem sokat tudunk mondani a megváltozásról, ugyanis nem egyenlőségről van szó. Ha tudjuk, hogy a $\varphi(\varepsilon)$ függvény **differenciálható** az $\varepsilon = 0$ helyen, akkor használhatóbb állítást tehetünk. Ekkor írhatjuk, hogy

$$\varphi'(0) = -\bar{u}.$$

Ezt a fontos összefüggést már sokkal hatékonyabban használhatjuk, azt jelenti, hogy $\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} = -\bar{u}$. Azt mondhatjuk, hogy **elegendően kicsi** ε jobboldal változásra a célfüggvényváltozás: $\triangle\varphi \approx -\bar{u}\varepsilon$, vagy más - a feladathoz jobban kötődő - jelöléssel $\triangle f \approx -\bar{u}\varepsilon$.

Ha $\bar{u} = 0$, akkor a jobboldal elegendően kicsi változása nem befolyásolja a célfüggvény optimális értékét.

Ha $\bar{u} > 0$, akkor a jobboldal elegendően kicsi **megváltozása** (ε) esetén a célfüggvény optimális értékének **megközelítő változása** $\triangle f \approx -\bar{u}\varepsilon$.

Más szavakkal:

A jobboldal elegendően kicsi **növekedése** esetén a célfüggvény optimális értéke **csökken**, a csökkenés megközelítő mértéke: duál változó $\cdot$ jobboldal növekedés.

A jobboldal elegendően kicsi **csökkenése** esetén a célfüggvény optimális értéke **növekszik**, a növekedés megközelítő mértéke: duál változó $\cdot$ jobboldal csökkenés.$|\bar{u}\varepsilon|$.

Ezt a vizsgálatot nevezzük **érzékenységvizsgálatnak**, tehát amikor azt vizsgáljuk, hogy a feltétel megváltozásának a célfüggvényre milyen hatása van.

A gyakorlat számára kényelmesebbé tehetjük az érzékenységvizsgálatot, ha nem a **zérus** jobboldal megváltozását vizsgáljuk, hanem a feladathoz szorosan kapcsolódó **számadat** megváltozását. Gondoljunk arra, hogy eredendően a feltétel az $x \geqq 1$ formában volt megadva. Gyakorlatiasabb azt vizsgálni, hogy az **x** felső korlátjának, **1-nek** a megváltozása hogyan befolyásolja az optimális célfüggvény-értéket. Ne feledkezzünk meg arról, hogy az $\bar{u}$ mindig a $\leqq$ feltételbeli **zérus jobboldal** megváltozására ad információt. Könnyen értelmezhetjük azonban a $x \geqq 1$ és az $1 - x \leqq 0$, feltételek jobboldal-változásának kölcsönhatását. Az $1-x \leqq \varepsilon$ perturbálásnak az $x \geqq 1-\varepsilon$ felel meg. Tehát a hatás ellentétes. Ekkor a következő mondható:

A jobboldal elegendően kicsi **növekedése** esetén a célfüggvény optimális értéke **növekszik**.

A jobboldal elegendően kicsi **csökkenése** esetén a célfüggvény optimális értéke **csökken**.

Vizsgáljuk meg az $x \geqq 1$ feltétel változását. A duál változó optimális értéke: $\bar{u} = e \approx 2.7183$.

Legyen a jobboldal megváltozása $\varepsilon = +0.01$. Ekkor ha a jobboldal 1-ről $1 + 0.01$-re változik, akkor a célfüggvény 2.7183-ról megközelítőleg $2.7183 + \bar{u}\varepsilon = 2.7183 + 0.027183 = 2.7455$-re változik.

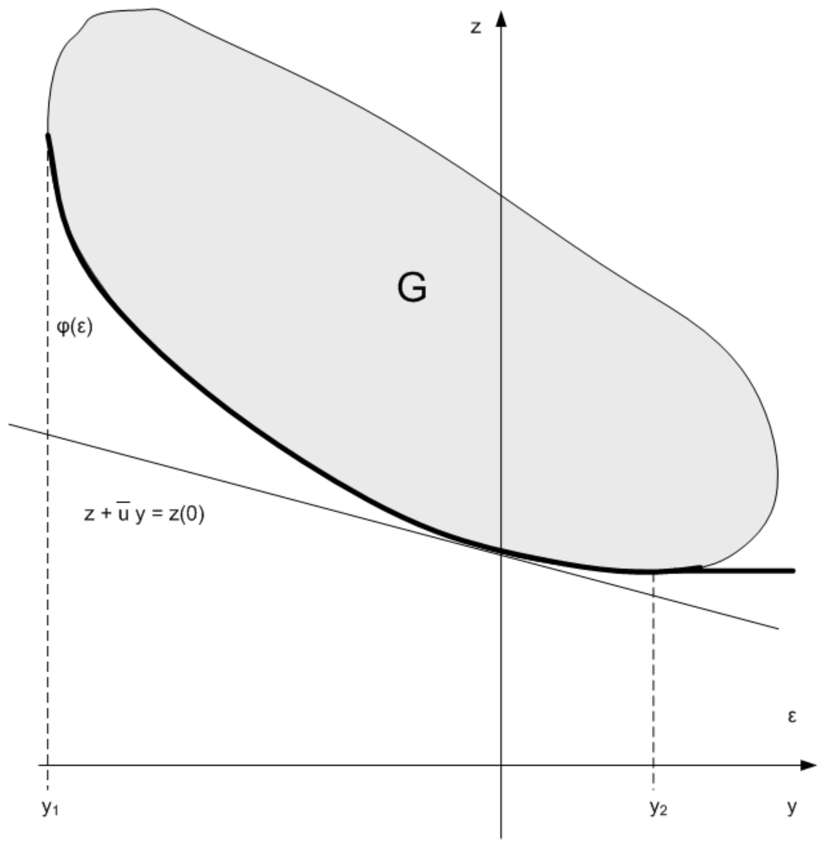
Legyen a jobboldal megváltozása $\varepsilon = -0.01$. Ekkor ha a jobboldal 1-ről $1 - 0.01$-re változik, akkor a célfüggvény 2.7183-ról megközelítőleg $2.7183 + \bar{u}\varepsilon = 2.7183 - 0.027183 = 2.6911$-re változik. Jelen példában 1 ± 0.01 esetén tudjuk a pontos optimumot, ezek $e^{1.01} = 2.7456$, ill. $e^{0.99} = 2.6912$. Látható, hogy elég pontos közelítő optimális értékek adódtak az érzékenységvizsgálatból. Természetesen csak elegendően kicsi jobboldal változás esetén érvényes ez a megállapítás.

18. példa

A 12. példában egy olyan többváltozós primál feladatot tekintettünk, amelynek csak egyetlen egyenlőtlenségi feltétele volt. A duál feladat geometriai interpretációját vizsgáltuk meg. Módosítsuk a feltétel jobboldalát 0-ról $\varepsilon \in \mathbb{R}$ értékre. Az alábbi feladatok közül a baloldali az eredeti feladatot, a jobboldali a perturbált feladatot mutatja.

Eredeti feladat	**Perturbált feladat**
$f(\mathbf{x}) \to \min!$	$f(\mathbf{x}) \to \min!$
$g(\mathbf{x}) \leqq 0$	$g(\mathbf{x}) \leqq \varepsilon$
$\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$	$\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$

Az X halmazt leképeztük az (y, z) síkra. Vizsgáljuk meg a 12. példa a) esetét, amelyben az alábbi G halmaz adódott.



Az eredeti feladatot geometriailag megoldani annyit tesz, mint megkeresni a G halmaz azon pontját, ahol $y \leqq 0$ és z minimális. Az optimális megoldás az $y = 0$ helyen van.

A perturbált feladatot geometriailag megoldani annyit tesz, mint megkeresni a G halmaz azon pontját, ahol $y \leqq \varepsilon$ és z minimális. Az ábrából egyszerűen leolvasható a következő: Ha ε az $[y_1, y_2]$ intervallumban van, akkor a perturbált feladat célfüggvényének minimuma az $y = \varepsilon$ helyen van, a minimum értéket pedig a G halmaz **alsó határgörbéjének** ordináta értéke adja. Jelölje $\varphi(\varepsilon)$ a perturbált feladat célfüggvényének optimális értékét, ennek a függvénynek a képe az $[y_1, y_2]$ intervallumban a G halmaz **alsó határgörbéje**. Az eredeti feladat optimális célfüggvényértékét a $\varphi(0)$ érték adja.

Mivel $\varepsilon \in \mathbb{R}$, így nem csak az $[y_1, y_2]$ intervallumban értelmezett a $\varphi(\varepsilon)$ függvény.

a) Ha $\varepsilon < y_1$, akkor a perturbált feladat $g(\mathbf{x}) \leqq \varepsilon$ feltétele $g(\mathbf{x}) < y_1$ ez pedig nem lehetséges, hiszen $g(\mathbf{x})$ értéke az X halmazon $g(\mathbf{x}) \geqq y_1$. Tehát ekkor a primál feltételi halmaz **üres**, a célfüggvény minimuma $\varphi(\varepsilon) = +\infty$ értékre vehető.

b) Ha $\varepsilon > y_2$, akkor $\varphi(\varepsilon)$ értéke konstans, azonos az y_2 helyen vett z értékkel.

Az érintőegyenes egyenlete: $z + \bar{u}y = z(0)$. Példánkban **nincs dualitási rés**, így $z(0) = \varphi(0)$. Emiatt és az $y = \varepsilon$ egyenlőség miatt írható, hogy $z = \varphi(0) - \bar{u}\varepsilon$. A $\varphi(\varepsilon)$ függvény görbéje (vastagon rajzolt görbe) minden $\varepsilon \in \mathbb{R}$ esetén az érintőegyenes **felett** halad, azaz írható, hogy

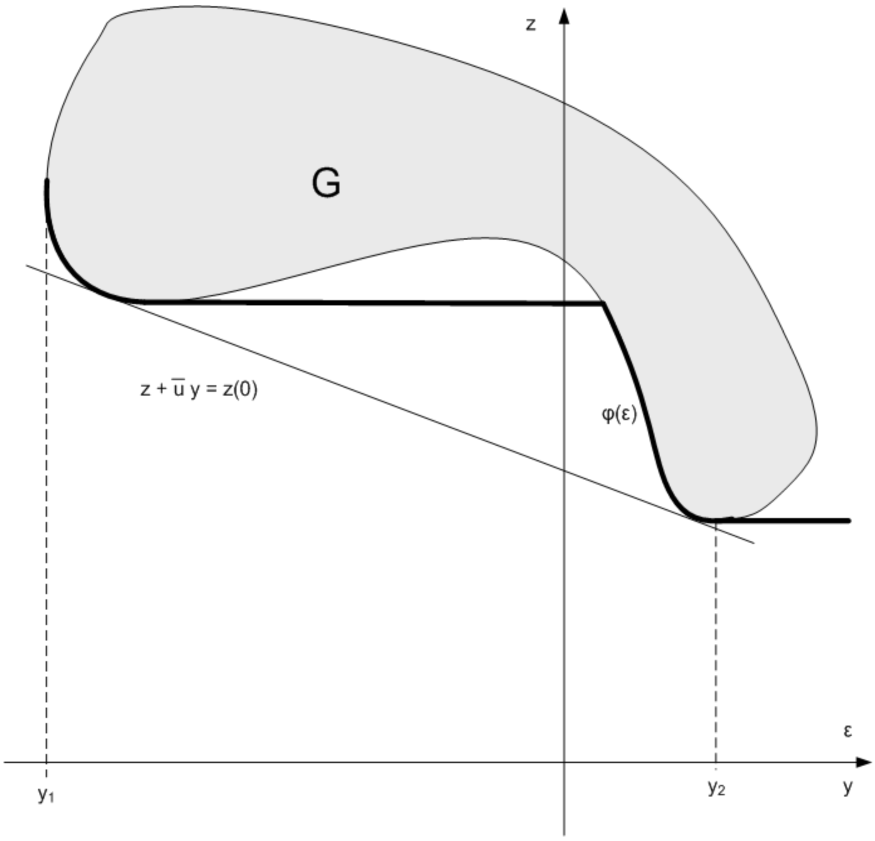
$$\varphi(\varepsilon) \geqq \varphi(0) - \bar{u}\varepsilon.$$

Ha a $\varphi(\varepsilon)$ függvény **differenciálható** az $\varepsilon = 0$ helyen, akkor az alábbi állítás is igaz:

$$\varphi'(0) = -\bar{u}.$$

A 17. példában elmondottakhoz hasonló az érzékenységvizsgálat, tehát elegendően kicsi ε jobboldal változásra a célfüggvényváltozás: $\triangle\varphi \approx -\bar{u}\varepsilon$, vagy $\triangle f \approx -\bar{u}\varepsilon$.

Most vizsgáljuk meg a 12. példa b) esetét, amelyben az alábbi G halmaz adódott.



A perturbált feladatot geometriailag megoldani annyit tesz, mint megkeresni a G halmaz azon pontját, ahol $y \leqq \varepsilon$ és z minimális. Itt is jelölje $\varphi(\varepsilon)$ a perturbált feladat célfüggvényének optimális értékét. Az előzőekhez hasonlóakat mondhatunk azokra az esetekre, amikor $\varepsilon < y_1$, ill. $\varepsilon > y_2$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $[y_1, y_2]$ intervallumban a $\varphi(\varepsilon)$ függvény képe az ábrában berajzolt vastag vonal.

Itt is igaz, hogy a $\varphi(\varepsilon)$ függvény görbéje minden $\varepsilon \in \mathbb{R}$ esetén az érintőegyenes **felett** halad, azaz írható, hogy $\varphi(\varepsilon) \geqq z(0) - \bar{u}\varepsilon$. Mivel ebben az esetben **van dualitási rés**, így $z(0) \neq \varphi(0)$, tehát nem tudunk használható formulát adni.

Összefoglalva a példabeli eseteket, ha **nincs dualitási rés**, akkor érvényes az alábbi állítás:

$$\varphi(\varepsilon) \geqq \varphi(0) - \bar{u}\varepsilon.$$

Szokás ezt az érzékenységvizsgálat **globális** formulájának is nevezni.

Ha a $\varphi(\varepsilon)$ függvény **differenciálható** az $\varepsilon = 0$ helyen, akkor az alábbi állítás is igaz:

$$\varphi'(0) = -\bar{u}.$$

Szokás ezt az érzékenységvizsgálat **lokális** formulájának is nevezni.

TÉTEL: (duál változók értelmezése, globális és lokális érzékenységi összefüggés)

Tekintsük a szokásos matematikai programozási feladat perturbált feladatát ($\varepsilon_i, \omega_i \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\to \min! \\ g_i(\mathbf{x}) &\leqq \varepsilon_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m \\ h_i(\mathbf{x}) &= \omega_i \qquad i = 1, 2, \ldots, k \\ \mathbf{x} &\in X \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy lézezik $\bar{\mathbf{x}}$ primál optimális megoldás, $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ duál optimális megoldás és **nincs dualitási rés**, azaz $f(\bar{\mathbf{x}}) = \Theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$.

Ekkor a perturbált feladat célfüggvényének optimális értékére igaz az alábbi globális összefüggés:

$$\varphi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m; \omega_1, \ldots, \omega_k) \geqq \varphi(0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0) - \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{k} \bar{v}_i \omega_i \right).$$

Ha a $\varphi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m; \omega_1, \ldots, \omega_k)$ függvény differenciálható a $(0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0)$ (vagy röviden $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$) helyen, akkor igazak az alábbi lokális összefüggések:

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_i}\right|_{(\mathbf{0},\mathbf{0})} = -\bar{u}_i, \qquad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_i}\right|_{(\mathbf{0},\mathbf{0})} = -\bar{v}_i.$$

Globális érzékenységvizsgálat a következőket jelenti. Ha **tetszőleges módon** megváltoztatjuk a feltételek jobboldalát, akkor a perturbált feladat és az eredeti feladat optimális célfüggvényértékének különbsége (eredeti feladat célfüggvényének megváltozása: $(\triangle f)$) **legalább** akkora, mint a duál változók és a perturbáló értékek szorzata összegének (-1)-szerese. Ha például csak az i-edik egyenlőtlenség jobboldala változik meg, akkor a célfüggvény-változás legalább $-\bar{u}_i\varepsilon_i$. Hasonlóan ha például csak az i-edik egyenlőség jobboldala változik meg, akkor a célfüggvény-változás legalább $-\bar{v}_i\omega_i$.

Lokális érzékenységvizsgálat a lokális összefüggésből értelmezhető a következők szerint. Ha valamelyik feltétel jobboldalát **elegendően kicsi értékkel** megváltoztatjuk, akkor a célfüggvény-változás $(\triangle f)$ **megközelítőleg** a duál változó és a jobboldal-változás szorzatának (-1)-szeresével azonos.

19. példa

Tekintsük az 1. példa optimalizálási feladatát, amely a következő:

Adott az (x_1, x_2) síkon az $x_1 + x_2 = 4$ egyenes, tekintsük az egyenes és a $-x_1 + x_2 \geqq 2$ féltér közös részét. Határozzuk meg a közös résznek, mint tartománynak azt a pontját, amely az origóhoz legközelebb van!

Végezzünk érzékenységvizsgálatot!

Megoldás:

Az 1. példában az 1. esetben úgy fogalmaztuk meg az optimalizálási feladatot, hogy az X halmaz az $\mathbb{R}^2$ tér, tehát a következőképpen:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \to \min! \\ g(x_1, x_2) &= 2 + x_1 - x_2 \leqq 0 \\ h(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ X &= \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

A feladat és Lagrange duáljának az optimális megoldása: $\bar{x}_1 = 1,\ \bar{x}_2 = 3,\ f_{\min} = f(\bar{\mathbf{x}}) = 10$.

A Lagrange duál feladat optimális megoldása: $\bar{u} = 2,\ \bar{v} = -4,\ \Theta_{\max} = \Theta(\bar{u}, \bar{v}) = 10$.

Globális érzékenységvizsgálat:

Ha az egyenlőtlenséges és az egyenlőséges feltétel jobboldalát **tetszőleges** ε, ill. ω értékkel megváltoztatjuk, akkor a perturbált feladat célfüggvényének értéke: $\varphi(\varepsilon, \omega) \geqq \varphi(0,0) - (\bar{u}\varepsilon + \bar{v}\omega)$, ahol $\varphi(0,0) = f_{\min} = 10$. Más szavakkal: A célfüggvényváltozás ($\triangle f$) **legalább** $-(2\varepsilon + (-4)\omega)$, azaz $\triangle f \geqq -2\varepsilon + 4\omega$.

Legyen $\varepsilon = 1,\ \omega = 2$, ekkor $\triangle f \geqq -2{\cdot}1{+}4{\cdot}2 = 6$. A perturbált feladat pontos célfüggvény optimumértéke: 18.5 (a változás pontos értéke: 8.5), tehát a tétel állításának megfelelő eredményt kaptunk ($8.5 > 6$). Azt is láthatjuk, hogy ez az eredmény kevésbé használható, hiszen a célfüggvény-változásra csupán egy alsó korlátot ad. Ezzel az eredménnyel csak akkor tudunk kezdeni valamit, ha ε, ω elegendően kicsi értékek. Ahogy tapasztalni fogjuk, a lokális érzékenységvizsgálat sokkal használhatóbb eredményt szolgáltat.

Lokális érzékenységvizsgálat:

Ha az **egyenlőtlenséges** feltétel jobboldalát **elegendően kicsi** ε értékkel megváltoztatjuk, akkor a perturbált feladat célfüggvényének változása **megközelítőleg** $-\bar{u}\varepsilon = -2\varepsilon$, tehát 10-ről megközelítőleg $10 - 2\varepsilon$-ra változik.

Ha az **egyenlőséges** feltétel jobboldalát **elegendően** kicsi ω értékkel megváltoztatjuk, akkor a perturbált feladat célfüggvényének változása **megközelítőleg** $-\bar{v}\omega = 4\omega$, tehát 10-ről megközelítőleg $10 + 4\omega$-ra változik.

Legyen $\varepsilon = 0.01$, ekkor $\triangle f \approx -2 \cdot 0.01 = -0.02$. A perturbált feladat pontos célfüggvény optimumértéke: 9.98005, tehát a célfüggvény változás megközelítőleg valóban -0.02.

Legyen $\omega = 0.02$, ekkor $\triangle f \approx 4 \cdot 0.02 = 0.08$. A perturbált feladat pontos célfüggvény optimumértéke: 10.0802, tehát a célfüggvény változás megközelítőleg valóban 0.08.

Mint ahogy már említettük, a jobboldalak **zérus** értékének megváltozását jobban érzékelhetjük, ha az **eredeti** feltételeket vizsgáljuk, azaz a $-x_1 + x_2 \geqq \mathbf{2}$ féltér egyenlőtlenségében, ill. az $x_1 + x_2 = \mathbf{4}$ egyenes egyenletében lévő **jobboldalakra** értelmezzük a megváltozást. A gyakorlatban ugyanis az érzékenységvizsgálatban azt kérdezzük, hogy milyen változást eredményez a féltér, ill. az egyenes egy adatának elegendően kicsi megváltozása? Ilyenkor a 0-nak ε-ra, ill. ω-ra történő változását át kell írni a 2, ill a 4 változására, ami nem okoz különösebb gondot.

Ha a féltér egyenlőtlenségében szereplő 2 a $2 + \varepsilon$ értékre változik, akkor a 10 optimális megoldás megközelítőleg $10 + 2\varepsilon$-ra változik. Ha a féltér támaszegyenese felfelé tolódik ($\varepsilon > 0$), akkor az origótól való távolság négyzete növekszik, lefelé tolódás esetén csökken. A változás mértéke abszolut értékben, megközelítőleg $2\,|\varepsilon|$.

Ha az egyenes egyenletében szereplő 4 a $4 + \omega$ értékre változik, akkor a 10 optimális megoldás megközelítőleg $10 + 4\omega$-ra változik. Ha az egyenes felfelé tolódik ($\omega > 0$), akkor az origótól való távolság növekszik, lefelé tolódás esetén csökken. A változás mértéke abszolut értékben, megközelítőleg $4\,|\omega|$.

Megjegyzés:
Az érzékenységvizsgálat gyakorlatibb használatára teszünk néhány hasznos megállapítást.

a) Legyen az i-edik feltétel eredeti alakja: $\tilde{g}_i(\mathbf{x}) \leqq b$ alakú. Ezt át kellett alakítani a $g_i(\mathbf{x}) = \tilde{g}_i(\mathbf{x}) - b \leqq 0$ alakra. Ehhez a $g_i(\mathbf{x}) \leqq 0$ feltételhez tartozzon az u_i optimális Lagrange duál változó. Ekkor a következőt mondhatjuk: A b jobboldal ε megváltozása megközelítőleg $-u_i\varepsilon$ célfüggvény-változást eredményez.

b) Legyen az i-edik feltétel eredeti alakja: $\tilde{g}_i(\mathbf{x}) \geqq b$ alakú. Ezt át kellett alakítani a $g_i(\mathbf{x}) = b - \tilde{g}_i(\mathbf{x}) \leqq 0$ alakra. Ehhez a $g_i(\mathbf{x}) \leqq 0$ feltételhez tartozzon az u_i optimális Lagrange duál változó. Ekkor a következőt mondhatjuk: A b jobboldal ε megváltozása megközelítőleg $u_i\varepsilon$ célfüggvény-változást eredményez.

Más szavakkal összefoglalva:
Ha az eredeti feltétel $\geqq$, akkor a célfüggvény megváltozásának iránya **megegyezik** a jobboldal megváltozásának irányával. A célfüggvényváltozás megközelítő értéke: $u_i\varepsilon$.
Ha az eredeti feltétel $\leqq$, akkor a célfüggvény megváltozásának iránya **ellenkező** a jobboldal megváltozásának irányával. A célfüggvényváltozás megközelítő értéke: $-u_i\varepsilon$.

Hasonló igaz az egyenlőséges feltételek esetén is.
Legyen az i-edik feltétel eredeti alakja: $\tilde{h}_i(\mathbf{x}) = b$ alakú. Ezt vagy a) $h_i(\mathbf{x}) = \tilde{h}_i(\mathbf{x}) - b = 0$ típusú, vagy b) $h_i(\mathbf{x}) = b - \tilde{h}_i(\mathbf{x}) = 0$ típusú alakra szokás átalakítani. A $h_i(\mathbf{x}) = 0$ feltételhez tartozzon a v_i optimális Lagrange duál változó. Ekkor a következőt mondhatjuk: A b jobboldal ε megváltozása megközelítőleg a) esetben $-v_i\varepsilon$, b) esetben $v_i\varepsilon$ célfüggvény-változást eredményez.

Megjegyzés:
Számos gyakorlati (közgazdasági) optimalizálási feladatban a Lagrange duál változókat **árnyékáraknak** szokás nevezni. Gondoljunk arra, hogy a feltétel jobboldala egy erőforrásra vonatkozó korlát, a célfüggvény pedig valamely gazdasági mennyiség. A feltételhez tartozó Lagrange duál változó optimális értéke (u) olyan módon **értékeli** az erőforrást, hogy az erőforráskorlát elegendően kicsi (ε) változása a gazdasági mennyiség optimumának $-u\varepsilon$ változását eredményezi.

7. Néhány optimalizálási feladat duál feladata

A következőkben három, gyakran előforduló feladattípus duál feladatának felírását mutatjuk be.

7.1. Lineáris programozási feladat duál feladata

Tekintsük az alábbi standard lineáris programozási feladatot:

$$\begin{gathered} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{cx} \to \min! \end{gathered}$$

ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. E feladatban legyen $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$ és $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$. A $\Theta(\mathbf{v})$ duál célfüggvény

$$\begin{aligned}\Theta(\mathbf{v}) &= \inf\{\mathbf{cx} + \mathbf{v}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) : \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\} = \\ &= \mathbf{vb} + \inf\{\mathbf{c} - \mathbf{vA})\mathbf{x} : \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\} = \begin{cases} \mathbf{vb}, & \text{ha } \mathbf{c} - \mathbf{vA} \geqq \mathbf{0} \\ -\infty, & \text{egyébként}\end{cases}\end{aligned}$$

Tehát a Lagrange duál feladat szokásosabb ($\mathbf{v}$ helyett $\mathbf{y}$-t használva) formában:

$$\begin{gathered}\mathbf{yA} \leqq \mathbf{c} \\ \mathbf{yb} \to \max!\end{gathered}$$

Feladat:
Vezesse le az alábbi nem standard lineáris programozási feladat duálisát!

$$\begin{gathered}\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{cx} \to \max!\end{gathered}$$

7.2. Bináris lineáris programozási feladat duál feladata

Tekintsük az alábbi bináris lineáris programozási feladatot:

$$\begin{gathered}\mathbf{Ax} \geqq \mathbf{b} \\ x_j \in \{0,1\} \quad j = 1,\dots,n \\ \mathbf{cx} \to \min!\end{gathered}$$

ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. E feladatban legyen X az a halmaz, amely előírja, hogy a primál változók csak 0 vagy 1 értéket vehetnek fel, azaz a $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_j \in \{0,1\},\quad j = 1,\dots,n\}$ és $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$. A $\Theta(\mathbf{v})$ duál célfüggvény

$$\begin{aligned}\Theta(\mathbf{v}) &= \inf\{\mathbf{cx} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) : x_j \in \{0,1\} \quad j = 1,\dots,n\} = \\ &= \mathbf{ub} + \inf\left\{\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{c} - \mathbf{uA})_j x_j : x_j \in \{0,1\} \quad j = 1,\dots,n\right\} = \mathbf{ub} + \sum_{j:(\mathbf{c}-\mathbf{uA})_j<0} (\mathbf{c} - \mathbf{uA})_j\end{aligned}$$

A Lagrange duál feladat célfüggvényében a $(\mathbf{c} - \mathbf{uA})$ vektor azon elemeinek összege szerepel, amely elemek negatívok. A duál feladat ($\mathbf{u}$ helyett $\mathbf{y}$-t használva) a következő:

$$\begin{gathered}\mathbf{yb} + \textstyle\sum_{j:(\mathbf{c}-\mathbf{yA})_j<0} (\mathbf{c} - \mathbf{yA})_j \to \max! \\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}\end{gathered}$$

20. példa
Egy turista hátizsákjában n különböző hasznos holmit szeretne a túrájára vinni. Az egyes tárgyak súlya legyen 7, 3, 5, 4 és a hátizsákjában legfeljebb 14 súlyt tud elvinni. Az összes tárgy nem fér a hátizsákjába, ezért a turista szelektálni kénytelen. Minden tárgynak ad egy, a tárgynak a túra során betöltendő hasznosságát mérő számértéket, amelyek legyenek

110, 40, 80, 60. A válogatást úgy végzi, hogy a súlykorlátozás betartása mellett a magával vitt tárgyak összértéke (összhasznossága) minél nagyobb legyen.

Oldjuk meg a feladatot! Határozzuk meg a duál feladatát és adjuk meg az optimális megoldást!

Megoldás

A válogatást tárgyanként egy 0 vagy 1 értéket felvehető döntési változóval (bináris változó) írhatjuk le. Legyen a döntési változó x_j, amelynek értéke 1, ha a turista beleteszi a j-edik tárgyat a hátizsákba; értéke 0, ha nem teszi bele.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 110x_1 & + & 40x_2 & + & 80x_3 & + & 60x_4 & \to & \max! \\ 7x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & \leqq & 14 \end{array}$$
$$x_j \in \{0,1\}\,, \quad j = 1,2,3,4$$

Ez egy speciális bináris lineáris programozási feladat, amelyet **Hátizsák feladatként** is szokás emlegetni. Az optimális megoldás:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ f(\bar{\mathbf{x}}) = f_{\max} = 210.$$

A célfüggvényt írjuk át minimalizálási feladatra, az X halmaz a bináris előírást írja le, ekkor a Lagrange függvény:

$$L(\mathbf{x}, u) = -(110x_1 + 40x_2 + 80x_3 + 60x_4) + u(7x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 14)$$

A $\Theta(u)$ duál célfüggvény:

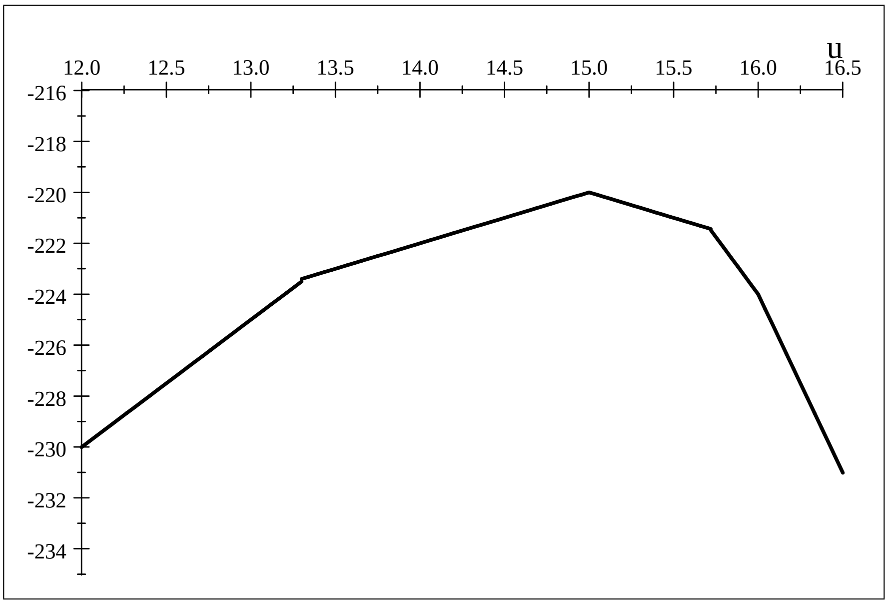
$$\begin{aligned} \Theta(u) &= \inf\{-(110x_1 + 40x_2 + 80x_3 + 60x_4) + u(7x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 14) : (x_j \in \{0,1\}\} \\ &= -14u \\ &\quad + \inf\{(7u - 110)x_1 : x_1 \in \{0,1\}\} \\ &\quad + \inf\{(3u - 40)x_2 : x_2 \in \{0,1\}\} \\ &\quad + \inf\{(5u - 80)x_3 : x_3 \in \{0,1\}\} \\ &\quad + \inf\{(4u - 60)x_4 : x_4 \in \{0,1\}\} \end{aligned}$$

Négy infimumot (minimumot) kell meghatározni, hasonlóan végezhető el mindegyik. A $pu - q$ mennyiség az X halmazon vagy 0 vagy $pu - q$. Akkor legkisebb egy adott $u \geqq 0$ esetén, ha $pu - q \leqq 0$, azaz $u \leqq \frac{q}{p}$, $(p > 0)$. Ha például $\frac{60}{4} \leqq u \leqq \frac{110}{7}$, akkor az x_1 és x_3 együtthatója nempozitív (negatív), így $\Theta(u) = -14u + (7u - 110) + (5u - 80) = -2u - 190$. A többi tartományban is hasonlóan kell számolni.

A duál feladat célfüggvénye:

$$\Theta(u) = \begin{cases} 5u - 290, & u \leqq \frac{40}{3} \\ 2u - 250, & \frac{40}{3} \leqq u \leqq \frac{60}{4} \\ -2u - 190, & \frac{60}{4} \leqq u \leqq \frac{110}{7} \\ -9u - 80, & \frac{110}{7} \leqq u \leqq \frac{80}{5} \\ -14u, & u \geqq \frac{80}{5} \end{cases}$$

A Lagrange duál feladat célfüggvényének ábrázolása:



A Lagrange duál feladat szerint ennek a $\Theta(u)$ függvénynek kell a maximumát megkeresni az $u \geqq 0$ feltétel figyelembevételével. A duál feladat optimális megoldása egyszerűen adódik: $\bar{u} = 15$, $\Theta_{\max} = \Theta(\bar{u}) = -220$.

Dualitási rést tapasztaltuk, hiszen $f_{\min} = -210 > \Theta_{\max} = -220$.

7.3. Kvadratikus programozási feladat duál feladata

Tekintsük az alábbi kvadratikus programozási feladatot:

$$\begin{gathered}\mathbf{Ax} \geqq \mathbf{b}\\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\\ \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{Cx})^2 \to \min!\end{gathered}$$

ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{k\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. A célfüggvényben szereplő $(\mathbf{Cx})^2$ tag biztosítja a kvadratikus alak pozitív szemidefinitségét, ugyanis $(\mathbf{Cx})^2 = (\mathbf{Cx})^T(\mathbf{Cx}) = \mathbf{x}^T\mathbf{C}^T\mathbf{Cx}$. Ha bevezetjük a $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$ szimmetrikus mátrixot, akkor $\mathbf{x}^T\mathbf{Qx}$ alak adódik, ami $(\mathbf{Cx})^2 \geqq 0$ miatt pozitív szemidefinit. Sok esetben nem a $\mathbf{C}$ mátrixot, hanem a $\mathbf{Q}$ mátrixot adják meg, ekkor, ha $\mathbf{Q}$ pozitív szemidefinit, akkor képezhetjük a $\mathbf{C}$ mátrixot. A képletek bonyolultsága miatt ebben az alfejezetben használjuk a transzponálás jelét.

E kis kitérő után rátérünk a duál feladat meghatározására. A primál feladatban legyen $X = \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$, ekkor a $\Theta(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ duál célfüggvény a definíció szerint felírva, majd alkalmasan átrendezve

$$\begin{aligned}\Theta(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= \inf\left\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{Cx})^2 + \mathbf{u}_1^T(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) + \mathbf{u}_2^T(-\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\right\}\\ &= \mathbf{u}_1^T\mathbf{b} + \inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Qx} + (\mathbf{c}^T - \mathbf{u}_1^T\mathbf{A} - \mathbf{u}_2^T)\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\right\}.\end{aligned}$$

A pozitív szemidefinitség miatt a minimalizálandó függvény $\mathbf{x}$-ben konvex tetszőleges $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ esetén. Mivel feltétel nélküli optimalizálásról van szó, a minimum szükséges és elégséges feltétele, hogy a Lagrange függvény $\mathbf{x}$ változók szerinti gradiense zérus legyen, azaz

$$\mathbf{Qx} + \mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}.$$

Ezt az egyenletet a
$$\mathbf{c}^T - \mathbf{u}_1^T\mathbf{A} - \mathbf{u}_2^T = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q},$$
alakban figyelembe véve, a duál célfüggvény az alábbi formát ölti:
$$\Theta(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1^T\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}.$$

Összefoglalva az eredményeinket - használva az eredeti $\mathbf{C}$ mátrixot - az alábbi Lagrange duál feladatot kapjuk.

A duál feladat első alakja

$$\mathbf{u}_1^T\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \to \max!$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^T\mathbf{A} + \mathbf{u}_2^T - \mathbf{x}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C} &= \mathbf{c}^T \\ \mathbf{u}_1 &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_2 &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}$$

A duál feladat második alakja

Szokásos más formában is megadni a duál feladatot, ehhez javasoljuk az alábbi módosításokat elvégezni: vezessük be a $\mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ új duál változót, hagyjuk el az $\mathbf{u}_2 \geqq \mathbf{0}$ duál változót, használjuk az $\mathbf{y} = \mathbf{u}_1$ új jelölést, ekkor a Lagrange duál feladat egy másik formáját kapjuk.

$$\mathbf{y}^T\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{w}^2 \to \max!$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^T\mathbf{A} - \mathbf{w}^T\mathbf{C} &\leqq \mathbf{c}^T \\ \mathbf{y} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}$$

A duál feladat harmadik alakja

A duál feladat más alakban is felírható, amennyiben a $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}$ mátrix pozitív definit. Ekkor létezik a $\mathbf{Q}^{-1}$ inverz mátrix és a

$$\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

szükséges feltételből az $\mathbf{x}$ vektor kifejezhető

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{u}_1 + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{u}_2 - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}.$$

Ezt behelyettesítve a Lagrange duál feladat első változatába a Lagrange duál feladat egy újabb formáját kapjuk:

$$\mathbf{u}_1^T\mathbf{b} - \frac{1}{2}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{u}_1 + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{u}_2 - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c})^T(\mathbf{A}^T\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{c}) \to \max!$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_2 &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}$$

A célfüggvényben kijelölt szorzást elvégezve, a célfüggvény formája

$$\mathbf{u}_1^T(\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}) + \mathbf{u}_2^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c} - \frac{1}{2}\mathbf{u}_1^T\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1^T\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{u}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_2^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{u}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{c}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}.$$

Áttekinthetőbb formát kapunk, ha bevezetjük az alábbi jelöléseket

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^T \\ \mathbf{F} &= \mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{d} &= \mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1} \end{aligned}$$

Ekkor a következő formájú Lagrange duál feladat adódik.

A duál feladat harmadik alakjának áttekinthetőbb verziója

$$\mathbf{u}_1^T(\mathbf{b} + \mathbf{F}\mathbf{c}) + \mathbf{u}_2^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c} - \frac{1}{2}\mathbf{u}_1^T\mathbf{D}\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1^T\mathbf{F}\mathbf{u}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_2^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{u}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{c}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c} \to \text{max!}$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_2 &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}$$

A harmadik formának a feltételi halmaza a legegyszerűbb, mivel csak a duál változókra előírt nemnegativitásból áll.