# MÁTRIX DEFINITSÉGÉNEK FOGALMA ÉS TESZTEK A DEFINITSÉG ELDÖNTÉSÉRE

DR. NAGY TAMÁS
egyetemi docens

Miskolci Egyetem
Alkalmazott Matematikai Tanszék

„A bemutatott kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg”
„This research was carried out as part of the TAMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 project with support by the European Union, co-financed by the European Social Fund.”

Miskolc, 2012

# Tartalomjegyzék

Mind a feltétel nélküli, mind a feltételes optimalizációban nagyon sok tételben szerepel valamely mátrix (általában Hesse-mátrix) definitsége. Jelen tananyagban megadjuk a mátrix definitségének, ill. feltételes definitségének a fogalmát, majd a további részben különböző módszereket (teszteket) mutatunk be egy négyzetes mátrix definit voltának meghatározására (eldöntésére).

# 1. Mátrix definitsége

## 1.1. Definitség fogalma

Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es (kvadratikus) mátrix.

Az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív definit, ha minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$.

Az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív szemidefinit, ha minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geqq 0$.

Az $\mathbf{A}$ mátrix negatív definit, ha minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$.

Az $\mathbf{A}$ mátrix negatív szemidefinit, ha minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leqq 0$.

A fenti kategóriákba nem sorolható kvadratikus mátrixokat indefinit mátrixoknak nevezzük.

Szokás csak a pozitív (szemi)definitség fogalmát megadni. Ennél a definíciónál azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix negatív (szemi)definit, ha a $-\mathbf{A}$ mátrix pozitív (szemi)definit.

Vannak esetek, amikor könnyen választ adhatunk a definitségre, pontosabban kizárhatjuk a definitséget. Néhányat ismertetünk.

1. Ha az $\mathbf{A}$ mátrix főátlójában valamelyik elem negatív, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix nem lehet pozitív definit.

2. Ha az $\mathbf{A}$ mátrix főátlójában valamelyik elem pozitív, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix nem lehet negatív definit.

3. Ha az $\mathbf{A}$ mátrix főátlójában van pozitív és negatív elem is, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix indefinit.

Ezek igazolása nagyon egyszerűen elvégezhető a definíció segítségével. Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix főátlóbeli eleme $a_{ii}$. Az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor legyen az $i$-edik egységvektor, azaz $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$. Ebben az esetben $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_i^T\mathbf{A}\mathbf{e}_i = a_{ii}$. Ha $a_{ii} < 0$, akkor ez azt jelenti, hogy van olyan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor, amelyre $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$, tehát az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ mennyiség nem lehet minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vktorra pozitív, azaz nem lehet az $\mathbf{A}$ mártrix pozitív definit. Hasonló okoskodással olvasható ki a fenti két állítás is.

Egyéb esetekben a definitség kizárása nem ilyen egyszerű, erre szolgálnak a következőkben leírt ún. tesztek.

## 1.2. Tesztek mátrix definitségének eldöntésére

Az alábbi alfejezetekben megismerjük azokat az ún. karakterizációs tételeket, amelyekben foglalt állítások alapján el lehet dönteni egy mátrix definitségét. Mivel az alkalmazásokban a szemidefinitség ritkán fordul elő, ezért általánosságban a határozott definitségre adunk teszteket. Mint látni fogjuk, az inercia teszt lesz az egyik leginkább használatos, ezért ennél a tesztnél közöljük a szemidefinitségre vonatkozó tesztet is.

### 1.2.1. Gauss-módszeren alapuló teszt

**TÉTEL (Gauss-módszeren alapuló teszt szimmetrikus mátrix pozitív definitségre)**

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix.

Tekintsük az $\mathbf{A}$ mátrix első sorának első elemét. Az $\mathbf{A}$ mátrix akkor és csak akkor lehet pozitív definit, ha $a_{11} > 0$. Ha ez fennáll, akkor hajtsunk végre egy Gauss eliminációs lépést (az $\mathbf{A}$ mátrix első oszlopát a második elemtől kinullázzuk). Ezt a műveletet pivotálásnak is szokás nevezni. Ekkor az $\mathbf{A}$ mátrix első sorát és oszlopát nem tekintve, keletkezik egy $(n-1) \times (n-1)$-es szimmetrikus $\mathbf{G}$ mátrix.

Az $\mathbf{A}$ mátrix akkor és csak akkor pozitív definit, ha a $\mathbf{G}$ mátrix pozitív definit.

**Példa**:

Vizsgáljuk meg definitség szempontjából az alábbi $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrixot a Gauss-módszer segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

A tétel azt mondja ki, hogyha az eredeti mátrix pozitív definit és a főátlóban választunk pozitív pivotelemet, akkor a pivotelem sorát és oszlopát nem tekintve, a maradék mátrix is pozitív definit lesz. A további lépésekben a mindenkori maradék mátrixon is elvégezzük a pivotálást. A pivotálást addig végezzzük, amíg $1 \times 1$-es mátrixhoz nem jutunk. Ha mindig pozitív pivotelemet választottunk és az $1 \times 1$-es mátrix is pozitív, akkor az eredeti mátrix is pozitív definit. A gyakorlati számításokban nem szoktuk elhagyni a sorokat és az oszlopokat, így egy felső háromszögmátrixhoz jutunk. A tétel szerint tehát akkor lesz a mátrix pozitív definit, ha a Gauss-módszer végrehajtása után keletkező felső háromszögmátrix minden főátlójában lévő elem pozitív.

A Gauss-módszer egyes lépéseiben kapott mátrixok:

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Mivel a főátlóban minden elem pozitív, ezért az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív definit.

Egy mátrix negatív definitséget vagy úgy döntjük el, hogy a $(-1)$-szerese pozitív definit, vagy közvetlenül a mátrixra alkalmazzuk a Gauss-módszert. Ez utóbbinál a főátlóban negatív pivotelemet kell választani és ha a keletkező felső háromszögmátrix minden főátlójában lévő elem negatív, akkor a mátrix negatív definit.

### 1.2.2. Főminor teszt

**Főminor definíciója:**

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix. Az $\mathbf{A}$ mátrix első $k$ sorából és első $k$ oszlopából $(k = 1, \ldots, n)$ képzett mátrixokat az $\mathbf{A}$ mátrix **főminormátrixainak** nevezzük és $\mathbf{A}_k$-val jelöljük. Az $\mathbf{A}_k$ mátrixok determinánsait $(\det(\mathbf{A}_k))$ **főminoroknak** nevezzük.

**TÉTEL (Főminor teszt pozitív/negatív definitségre)**

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix. Tekintsük a mátrix összes főminorát $(\det(\mathbf{A}_k),\ k = 1, \ldots, n)$.

Ha $\det(\mathbf{A}_k) > 0$ minden $k = 1, \ldots, n$ esetén, azaz minden főminor pozitív, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív definit.

Ha $(-1)^k \det(\mathbf{A}_k) > 0$ minden $k = 1, \ldots, n$ esetén, azaz a főminorok előjele váltakozik (első főminor előjele negatív), akkor az $\mathbf{A}$ mátrix negatív definit.

A tétel állításai fordítva is igazak.

**Példa**:
Vizsgáljuk meg az előző példabeli $\mathbf{A}$ mátrix definitségét a főminor teszt segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{A}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ főminormátrixok és azok determinánsai, a főminorok az alábbiak:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}_1) = 2, \quad \det(\mathbf{A}_2) = 3, \quad \det(\mathbf{A}_3) = \det(\mathbf{A}) = 8.$$

Mivel minden főminor pozitív, ezért az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív definit.

A determináns meghatározását többféle módon is elvégezhetjük. Az alábbiakban a pivotáláson alapuló módszert ismertetjük. Ehhez először definiáljuk a Schur-komplemenst.

**Schur-komplemens definíciója:**
Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix. Válasszunk egy nemzérus pivotelemet (bárhol a mátrixban), végezzük el a pivotálást. Schur-komplemensnek a pivotsor és a pivotoszlop elhagyásával keletkező mátrixot nevezzük.

**Algoritmus egy négyzetes mátrix determinánsának meghatározására Schur-komplemens segítségével**
Az algoritmus az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix determinánsának meghatározására szolgál, ha $n \geqq 3$. Az $n = 1, 2$ esetekben a determináns számítása nem okoz nehézséget.

Az algoritmus egyes lépéseiben az előjeles determináns jelölésére a $det$ nevű változót használjuk.

**1. lépés:**
Válasszunk a Schur-komplemensben (induláskor az $\mathbf{A}$ mátrix) egy tetszőleges nemzérus pivotelemet.

Ha nincs ilyen, akkor $det = 0$ és menjünk a 2. lépésre.

Ha a Schur-komplemens $2 \times 2$ méretű, akkor legyen

$$det = \text{a } 2 \times 2\text{-es méretű mátrix determinánsa}$$

és menjünk a 2. lépésre.

Elvégezzük a pivotálást és tekintjük a Schur-komplemenst. Ekkor legyen az előjeles determináns értéke

$$det = paritás \cdot pivotelem.$$

A *paritás* a **mindenkori Schur-komplemensben** a pivotelem helyére utal, értéke $+1$, ill. $-1$ a sakktáblaszabály alapján, azaz a pivotelem helyét meghatározó indexek összege páros, ill. páratlan. Visszatérünk az 1. lépésre.

**2. lépés (megállás):**
Befejeztük a számítást. Az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsát az egyes lépésekben kapott *det* előjeles determinánsok **szorzata** adja, képletben $\det(\mathbf{A}) = \prod det$ .

**Példa:**
A determináns számítását az alábbi $\mathbf{A}$ mátrixon mutatjuk be.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az első pivotelem legyen az $a_{12} = s_{12} = 1$, mivel a pivotelem az $(1, 2)$ helyen van, így a *paritás* $-1$, hiszen az indexek összege $(1 + 2)$ páratlan, az előjeles determináns értéke $det = (-1) \cdot 1 = -1$. Elvégezve a pivotálást, kapjuk az alábbi Schur-komplemenst:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & \boxed{1} & 4 \end{bmatrix}.$$

A következő pivotelem legyen az $s_{32} = 1$, mivel a pivotelem a komplemensben a $(3, 2)$ helyen van, így a *paritás* $-1$, az előjeles determináns értéke $det = (-1) \cdot 1 = -1$. Elvégezve a pivotálást az alábbi Schur-komplemenst kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}.$$

Mivel a Schur-komplemens $2 \times 2$-es mátrix, így nincs szükség további pivotálásra, $det = 4 \cdot (-10) - 3 \cdot (-4) = -28$. Megállunk, az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa az egyes lépésekben számított *det* előjeles determinánsok szorzata, azaz

$$\det(\mathbf{A}) = (-1) \cdot (-1) \cdot (-28) = -28.$$

**Feladat:**
Határozza meg az előző példában a $\det(\mathbf{A})$ értéket a fenti algoritmussal!

### 1.2.3. Sajátérték teszt

**Sajátérték definíciója**:
Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix. Azokat a $\lambda$ számokat, amelyek kielégítik az $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ egyenletet az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeinek nevezzük.

**TÉTEL (Sajátérték teszt pozitív/negatív definitségre)**
Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix. Tekintsük a mátrix összes sajátértékét.
Ha minden sajátérték pozitív, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív definit.

Ha minden sajátérték negatív, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix negatív definit.

**Példa**:
Vizsgáljuk meg az első példabeli $\mathbf{A}$ mátrix definitségét a sajátérték teszt segítségével!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei:

$$\lambda_1 = 0.057, \qquad \lambda_2 = 2.08, \qquad \lambda_3 = 8.36\ .$$

Mivel minden sajátérték pozitív, ezért az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív definit.

### 1.2.4. Inercia teszt

A sajátérték teszt munkaigényes, ezért ritkábban használjuk. Helyette - a sajátértékekkel kapcsolatos - ún. inercia tesztet használjuk. A sajátérték tesztnél láttuk, hogy nem szükséges ismerni a sajátértékeket, elegendő tudni, hogy azok milyen előjelüek.

**Inercia definíciója:**
Egy $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix inerciáján egy rendezett számhármast értünk, jelölése

$$Iner(\mathbf{A}) = (neg, null, poz),$$

ahol $neg$ az $\mathbf{A}$ mátrix negatív sajátértékeinek száma, $null$ az $\mathbf{A}$ mátrix zérusértékű sajátértékeinek száma, $poz$ az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív sajátértékeinek száma.

**TÉTEL (Inercia teszt pozitív/negatív (szemi)definitségre)**
Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix. Tekintsük a mátrix inerciáját ($Iner(\mathbf{A})$).
Ha $Iner(\mathbf{A}) = (0, 0, n)$, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív definit.
Ha $Iner(\mathbf{A}) = (n, 0, 0)$, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix negatív definit.
Ha $Iner(\mathbf{A}) = (0, null, n-null)$, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív szemidefinit. $(0 < null < n)$
Ha $Iner(\mathbf{A}) = (n-null, null, 0)$, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix negatív szemidefinit $(0 < null < n)$.
Ha $Iner(\mathbf{A})$ nem sorolható a fenti kategóriákba, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix indefinit.
A tétel állításai fordítva is igazak.

A tétel szerint tehát pozitív (negatív) definitség esetén minden sajátérték pozitív (negatív), míg pozitív (negatív) szemidefinitség esetén nincs negatív (pozitív) sajátérték, de van zérus sajátérték.

Az inercia meghatározását is végezhetjük pivotálással, ezt mutatja be a következő algoritmus. Az algoritmus egyes lépéseiben az inercia jelölésére az $Iner$ nevű változót használjuk.

**Algoritmus egy szimmetrikus mátrix inerciájának meghatározására (Cottle algoritmus)**
**1. Principális pivotálás**:
Válasszunk a Schur-komplemens (induláskor az $\mathbf{A}$ mátrix) **főátlójában** egy tetszőleges nemzérus pivotelemet. Amennyiben nincs ilyen, akkor menjünk a 2. lépésre.

Ha a Schur-komplemens $1 \times 1$ méretű, akkor az $Iner$ mennyiséget a következőképpen határozzuk meg. Ha a Schur-komplemensbeli egyetlen szám negatív, akkor legyen $Iner = (1, 0, 0)$, ha pedig a szám pozitív, akkor legyen $Iner = (0, 0, 1)$. Menjünk a 4. lépésre.

Elvégezzük a pivotálást (principális, mert a pivotelem főátlóbeli) és tekintjük a Schur-komplemenst. Ekkor legyen $Iner = (1, 0, 0)$, ha a pivotelem negatív, ill. $Iner = (0, 0, 1)$, ha a pivotelem pozitív. Visszatérünk az 1. lépésre.

**2. Kettős pivotálás**:

Ebben az esetben a Schur-komplemens főátlójában csak zérus elem van.

Válasszunk a Schur-komplemensben egy nemzérus elemet. Amennyiben nincs ilyen, akkor menjünk a 3. lépésre.

Ha a Schur-komplemens $2 \times 2$ méretű, akkor legyen $Iner = (1, 0, 1)$. Menjünk a 4. lépésre.

Keressük meg ennek az elemnek a főátlóra vonatkozó tükörképét (szimmetria miatt azonos értékű lesz a kiválasztott elemmel).

Elvégezzük az ún. kettős pivotálást, azaz először az egyik pozícióban választva a pivotelemet, majd az új Schur-komplemensen a megállapított szimmetrikus pozícióban választva a pivotelemet. Ekkor legyen $Iner = (1, 0, 1)$ függetlenül a választott elem előjelétől.

Visszatérünk 1. lépésre.

**3. Zérus Schur-komplemens**

Ebben az esetben a Schur-komplemens minden eleme zérus. Ha ez a Schur-komplemens $k \times k$ méretű, akkor legyen $Iner = (0, k, 0)$. Menjünk a 4. lépésre.

**4. Megállás és az inercia kiszámítása**

Befejeztük a számítást. Az $\mathbf{A}$ mátrix inerciáját, az $Iner(\mathbf{A})$-t az egyes lépésekben kapott $Iner = (neg, null, poz)$ rendezett számhármasok **összege** adja.

**Példa:**

Először azon a példán mutatjuk be az inercia számítását, amelynél kiszámítottuk a sajátértékeket. Az $\mathbf{A}$ mátrix a következő:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Az első pivotelem legyen az $a_{11} = 1$, mivel ez pozitív, így $Iner = (0, 0, 1)$. Elvégezve a principális pivotálást, kapjuk az alábbi Schur-komplemenst:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

A következő pivotelem legyen az $s_{11} = 1$, mivel ez pozitív, így $Iner = (0, 0, 1)$. Elvégezve a principális pivotálást az alábbi Schur-komplemenst kapjuk.

$$\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

Mivel a Schur-komplemens $1 \times 1$-es mátrix, így nincs szükség pivotálásra, az elem pozitív, így $Iner = (0, 0, 1)$. Megállunk, az $\mathbf{A}$ mátrix inerciája

$$Iner(\mathbf{A}) = (0, 0, 1) + (0, 0, 1) + (0, 0, 1) = (0, 0, 3),$$

azaz az $\mathbf{A}$ mátrixnak az összes sajátértéke pozitív, így a tétel értelmében a mátrix pozitív definit, amit az előző példában is láttunk.

**Példa**

Most tekintsük az alábbi $\mathbf{A}$ mátrixot, amelynek az inercia-számítása az alábbiak szerint alakul.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az első pivotelem legyen az $a_{11} = 1$, mivel ez pozitív, így $Iner = (0,0,1)$. Elvégezve a principális pivotálást, kapjuk az alábbi Schur-komplemenst:

$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{-2} & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel minden főátlóbeli elem zérus, így például válasszuk a Schur-komplemens $(1,2)$ pozíciójában lévő $s_{12} = -2$ elemet. Ekkor $Iner = (1,0,1)$. Kettős pivotálást kell végeznünk. Egy dologra kell figyelnünk, nevezetesen, hogy az első pivotálás elvégzése után a második pivotelemet jó helyen válasszuk ki. Az első pivotálás utáni eredmény az alábbi $2 \times 2$-es mátrix. Ebben a mátrixban a fenti $3 \times 3$-as mátrix $s_{12}$ tükörképének megfelelő $s_{21}$ elem pozíciója $(1,1)$, tehát itt kell pivotelemet választani. A második pivotálás utáni Schur-komplemens az alábbi $1 \times 1$-es mátrix.

$$\begin{bmatrix} \boxed{-2} & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}.$$

Mivel a Schur-komplemens $1 \times 1$-es mátrix, így nincs szükség pivotálásra, az elem pozitív, így $Iner = (0,0,1)$. Megállunk, az $\mathbf{A}$ mátrix inerciája

$$Iner(\mathbf{A}) = (0,0,1) + (1,0,1) + (0,0,1) = (1,0,3),$$

azaz az $\mathbf{A}$ mátrixnak 1 darab negatív sajátértéke, 3 darab pozitív sajátértéke van, zérusértékű sajátértéke viszont nincs. A tétel értelmében az $\mathbf{A}$ mátrix indefinit, mivel a tételben szereplő négy lehetőség egyikébe sem tartozik az $Iner(\mathbf{A}) = (1,0,3)$ inercia.

**Feladat**:

Határozza meg a fenti példa mátrixának a determinánsát pivotálás segítségével!

Összefoglalásképpen elmondhatjuk, hogy a négyféle teszt közül három (Gauss-módszeren alapuló teszt, főminor teszt, inercia teszt) esetében a jól ismert pivotálással dolgozhatunk. Az olvasó dönti el, hogy egy adott probléma esetén melyik tesztet használja. A gyakorlatban leginkább az inercia tesztet szoktuk alkalmazni.

# 2. Mátrix feltételes definitsége

A továbbiakban az ún. feltételes definitséggel foglalkozunk. Ez a fogalom nagyon fontos szerepet tölt be a feltételes optimalizálásban. Először definiáljuk a feltételes pozitív, illetve a feltételes negatív definitséget és bemutatjuk a vonatkozó teszteket is.

## 2.1. Feltételes definitség fogalma

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix és $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ olyan mátrix, amelyre $rang(\mathbf{B}) = m$, azaz a $\mathbf{B}$ mátrix **sorvektorai** lineárisan függetlenek (teljes sorrangú).

Az $\mathbf{A}$ mátrixot feltételesen pozitív definitnek nevezzük a $\mathbf{B}$ mátrixra nézve, ha

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \quad \text{minden } \mathbf{x} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ vektorra.}$$

Az $\mathbf{A}$ mátrixot feltételesen negatív definitnek nevezzük a $\mathbf{B}$ mátrixra nézve, ha

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0 \quad \text{minden } \mathbf{x} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ vektorra.}$$

Tehát a feltételes definitség nem követeli meg az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ mennyiség előjelének állandóságát minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra, hanem csak azokra az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorokra, amelyek merőlegesek a $\mathbf{B}$ mátrix **sorvektoraira**. Más megfogalmazásban azt is mondhatjuk, hogy egy altéren követeljük meg a definitséget, mégpedig a $\mathbf{B}$ mátrix nullterén.

Nyilvánvaló tény, ha egy $\mathbf{A}$ mátrix pozitív (negatív) definit, akkor feltételesen is pozitív (negatív) definit.

Néhány szót szólunk az $n$ és az $m$ méretek viszonyáról. Az $m > n$ nem lehetséges, mert ekkor $rang(\mathbf{B}) \leqq n < m$, nem teljesül a $\mathbf{B}$ mátrixra vonatkozó teljes sorrangúsági előírás. Az $m = n$ elvileg lehetséges, de ekkor a $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszernek a $rang(\mathbf{B}) = m$ miatt csak az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ triviális megoldása lehet, ekkor pedig nincs olyan vektor, amelyre nézve előírnánk a definitséget. Tehát csak az $n > m$ esetben van értelme feltételes definitségről beszélni.

**Példa**:
Tekintsük az alábbi egyszerű példát.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Megoldás.**
Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az $\mathbf{x} = [2,\ -1]$ vektor esetén $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = -1$, az $\mathbf{x} = [2,\ 1]$ vektor esetén pedig $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 23$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix indefinit. Most tekintsük csupán azokat az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorokat, amelyekre $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ezek az $\mathbf{x}$ vektorok felírhatók $\mathbf{x} = [\alpha,\ -\alpha]$, $\alpha \neq 0$ alakban, hiszen ekkor teljesedik a $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenlet. Egyszerű számolással ezekre az $\mathbf{x}$ vektorokra $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 2\alpha^2$, mivel $2\alpha^2 > 0$ minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra, így az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív definit minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vektorra, azaz az $\mathbf{A}$ mátrix feltételesen pozitív definit a $\mathbf{B}$ mátrixra nézve.

Az alábbiakban a feltételes definitség eldöntésére két tesztet mutatunk be. Ehhez az ún. szegélyezett mátrix fogalmára van szükségünk.

**Szegélyezett szimmetrikus mátrix definíciója:**
Konstruáljunk meg az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixokból egy $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ szimmetrikus mátrixot az alábbi módon:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Az így előállított mátrixot **szegélyezett mátrix**nak nevezzük.

## 2.2. Tesztek mátrix feltételes definitségének eldöntésére

### 2.2.1. Főminor teszt feltételes definitségre

**TÉTEL (Főminor teszt feltételes pozitív/negatív definitségre)**

Tekintsük az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixokból a $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ szegélyezett mátrixot. Konstruáljuk meg a $\mathbf{C}_k$ mátrixokat az alábbi módon:

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{B}_k^T \\ \mathbf{B}_k & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{A}_k$ az $\mathbf{A}$ mátrix első $k$ sora és első $k$ oszlopa (az $\mathbf{A}$ mátrix $k$-adik főminor mátrixa), $\mathbf{B}_k$ a $\mathbf{B}$ mátrix első $k$ oszlopa.

Ha

$$(-1)^m \det(\mathbf{C}_k) > 0 \quad \text{minden } k = m+1, m+2, \ldots, n \text{ esetén},$$

akkor az $\mathbf{A}$ mátrix feltételesen pozitív definit a $\mathbf{B}$ mátrixra nézve (fordítva is igaz az állítás).

Ha

$$(-1)^k \det(\mathbf{C}_k) > 0 \quad \text{minden } k = m+1, m+2, \ldots, n \text{ esetén},$$

akkor az $\mathbf{A}$ mátrix feltételesen negatív definit a $\mathbf{B}$ mátrixra nézve (fordítva is igaz az állítás).

**Megjegyzés**:

A feltételes pozitív definitség esetén minden determináns azonos előjelű, míg a feltételes negatív definitség esetén a determinánsok előjele váltakozik. Ez hasonló a feltétel nélküli definitségre.

A feltételes **pozitív** definitség esetén, ha $m$ **páros**, akkor minden determináns **pozitív**, ha pedig $m$ **páratlan**, akkor minden determináns **negatív**.

A feltételes **negatív** definitség esetén, ha $m$ **páros**, akkor az első determináns **negatív**, ha pedig $m$ **páratlan**, akkor az első determináns **pozitív**, a többi determináns **váltakozó előjelű**.

Ha $n = m + 1$, akkor a főminor teszt során csak egyetlen egy mátrixnak, magának a szegélyezett mátrixnak a determinánsát kell kiszámítani. Amennyiben $n > m + 1$, úgy több determinánst kell meghatároznunk, ez már megnöveli a főminor teszt munkaigényét, így hatékonyabb az inercia teszt alkalmazása.

A gyakorlatban sokszor találkozunk az $n = 2$, $m = 1$ esettel ($n = m + 1$ és $m$ páratlan). Erre az esetre a főminor tesztet külön is ismertetjük.

Ha $\det(\mathbf{C}) < 0$, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix feltételesen **pozitív** definit a $\mathbf{B}$ mátrixra nézve.

Ha $\det(\mathbf{C}) > 0$, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix feltételesen **negatív** definit a $\mathbf{B}$ mátrixra nézve.

**Példa**:

Tekintsük az alábbi $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ mátrixokat és döntsük el a főminor teszt segítségével, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix feltételesen pozitív definit-e a $\mathbf{B}$ mátrixra nézve!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Megoldás:**

Az első lépésben konstruáljuk meg az ún. szegélyezett **C** mátrixot

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel $n = 3$, $m = 2$, így $k = 3$, azaz csak a $\mathbf{C}_3$ mátrix determinánsát kell meghatározni, amely nem más mint maga a **C** mátrix. A determináns meghatározása során nyert Schur-komplemensek:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 & -7 \\ -3 & -2 & \boxed{-1} & -2 \\ -3 & -7 & -2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 4 & \boxed{4} & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Az egyes lépésekben nyert előjeles determinánsok:

$$det = 1, \quad det = -1, \quad det = 4, \quad det = -\frac{201}{4}.$$

A **C** mátrix determinánsa az egyes lépésekben kapott előjeles determinánsok szorzata, azaz $\det(\mathbf{C}) = 201$.

Mivel $m = 2$, azaz $m$ páros és a determináns pozitív, így az **A** mátrix feltételesen pozitív definit a **B** mátrixra nézve.

**Példa**:

Tekintsük az alábbi **A**, **B** mátrixokat és döntsük el a főminor teszt segítségével, hogy az **A** mátrix feltételesen pozitív definit-e a **B** mátrixra nézve!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Megoldás:**

Az első lépésben konstruáljuk meg az ún. szegélyezett **C** mátrixot

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel $n = 3$, $m = 1$, így $k = 2, 3$, azaz a $\mathbf{C}_2$ és a $\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}$ mátrixok determinánsát kell meghatározni. A determináns meghatározását pivotálással végezzük.

A $\mathbf{C}_2$ mátrix determinánsát az alábbiak szerint végezzük:

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{C}_2$ mátrix determinánsa, $\det(\mathbf{C}_2) = 1 \cdot ((-5) \cdot (-1) - (-3) \cdot (-3)) = -4$.

A $\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}$ mátrix determinánsát az alábbiak szerint végezzük:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -5 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & \boxed{-1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{4} & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{15}{4} \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}$ mátrix determinánsa, $\det(\mathbf{C}_3) = \prod(\mathit{paritás} \cdot \mathit{pivotelem}) = (1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot (-1)) \cdot (1 \cdot 4) \cdot (\frac{15}{5}) = -15$.

Megjegyezzük, hogy a determináns meghatározásánál az $1 \times 1$-es Schur komplemenst is meghatároztuk, látható, hogy így is működik az algoritmus, nyilván egyszerűbb, ha megállunk a $2 \times 2$-es Schur komplemensnél és annak determinánsát számítjuk ki, mint ahogy az előző determináns számításánál tettük.

Mivel $m = 1$, azaz $m$ páratlan és a $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ mátrixok determinánsa negatív, így az $\mathbf{A}$ mátrix feltételesen pozitív definit a $\mathbf{B}$ mátrixra nézve.

Megjegyezzük, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix indefinit, ezt könnyen ellenőrizhetjük, hiszen $e_1^T \mathbf{A} e_1 = a_{11} = 1 > 0$, $e_2^T \mathbf{A} e_2 = a_{22} = -1 < 0$. Képlet helyett szavakkal megfogalmazva, van az $\mathbf{A}$ mátrix főátlóban pozitív és negatív elem is, így indefinit. Az $\mathbf{A}$ mátrix a $\mathbf{B}$ mátrixra nézve viszont már pozitív definitre adódott.

### 2.2.2. Inercia teszt feltételes pozitív/negatív definitségre

**TÉTEL (Inercia teszt feltételes pozitív/negatív definitségre)**

Tekintsük az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixokból a $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ szegélyezett mátrixot.

Ha a $\mathbf{C}$ mátrixnak pontosan $n$ darab pozitív sajátértéke, $m$ darab negatív sajátértéke van és nincs zérus sajátértéke, azaz $Iner(\mathbf{A}) = (m, 0, n)$, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix feltételesen pozitív definit a $\mathbf{B}$ mátrixra nézve.

Ha a $\mathbf{C}$ mátrixnak pontosan $n$ darab negatív sajátértéke, $m$ darab pozitív sajátértéke van és nincs zérus sajátértéke, azaz $Iner(\mathbf{A}) = (n, 0, m)$, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix feltételesen negatív definit a $\mathbf{B}$ mátrixra nézve.

Fordítva is igazak az állítások.

A tétel tehát azt állítja, hogy a feltételes definitség esetén a megfelelő előjelű sajátértékek száma a mátrixok sorméretével kapcsolatos.

**Példa**:

Tekintsük az alábbi $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ mátrixokat és döntsük el az inercia teszt segítségével, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix feltételesen pozitív definit-e a $\mathbf{B}$ mátrixra nézve!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Megoldás:**

Az első lépésben konstruáljuk meg az ún. szegélyezett **C** mátrixot:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A **C** mátrix inerciájának meghatározása során nyert Schur-komplemensek:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 & -7 \\ -3 & -2 & \boxed{-1} & -2 \\ -3 & -7 & -2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 4 & \boxed{4} & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{5} & 7 \\ 7 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{201}{20} \end{bmatrix}$$

Az egyes lépésekben nyert $Iner$ inerciák:

$$Iner = (0,0,1), \quad Iner = (1,0,0), \quad Iner = (0,0,1), \quad Iner = (0,0,1), \quad Iner = (1,0,0).$$

A **C** mátrix inerciája a lépésekben kapott $Iner$ mennyiségek összege, azaz $Iner(\mathbf{C}) = (2,0,3)$.

Mivel a **C** mátrixnak $n = 3$ darab pozitív értékű sajátértéke, $m = 2$ darab negatív értékű sajátértéke van és zérus értékű sajátértéke nincs, ezért az **A** mátrix feltételesen pozitív definit a **B** mátrixra nézve.

**Példa**:

Tekintsük az alábbi **A**, **B** mátrixokat és döntsük el az inercia teszt segítségével, hogy az **A** mátrix feltételesen pozitív definit-e a **B** mátrixra nézve!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az első lépésben konstruáljuk meg az ún. szegélyezett **C** mátrixot

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Megoldás:**

A **C** mátrix inerciájának meghatározása során nyert Schur-komplemensek:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & \boxed{-1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{4} & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{15}{4} \end{bmatrix}$$

Az egyes lépésekben nyert $Iner$ inerciák:

$$Iner = (0,0,1), \quad Iner = (1,0,0), \quad Iner = (0,0,1), \quad Iner = (0,0,1).$$

A $\mathbf{C}$ mátrix inerciája a lépésekben kapott $Iner$ mennyiségek összege, azaz $Iner(\mathbf{C}) = (1,0,3)$.

Mivel a $\mathbf{C}$ mátrixnak $n = 3$ darab pozitív értékű sajátértéke és $m = 1$ darab negatív értékű sajátértéke van (zérus értékű sajátértéke nincs), ezért az $\mathbf{A}$ mátrix feltételesen pozitív definit a $\mathbf{B}$ mátrixra nézve.