TÖBBCÉLÚ PROGRAMOZÁS

Dr. Nagy Tamás
egyetemi docens

Miskolci Egyetem

Alkalmazott Matematikai Tanszék

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Nagyon gyakran előfordul, hogy egy optimalizálási feladatnál több cél is megfogalmazódik. Sok esetben azonban ilyenkor egyetlen célt emelnek ki, amely szerint optimalizálnak, a többi célt figyelmen kívül hagyják, esetleg akkor veszik figyelembe őket, ha az elsődleges cél szerint több optimális megoldás is adódik és ezek közül választják ki a másodlagos cél szerinti optimumot. Az esetek nagy részében azonban a célok nem elhanyagolható jelentőséggel bírnak, tehát több célt kell egyidejűleg kezelni. Az alábbi feladatot nevezzük többcélú programozási feladatnak:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &\in S \\
f_1(\mathbf{x}) &\to \min! \\
f_2(\mathbf{x}) &\to \min! \\
&\vdots \\
f_k(\mathbf{x}) &\to \min!
\end{aligned}
$$

ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ a döntési változók vektora, $S \subseteq R^n$ a megengedett megoldások halmaza, $f_i(\mathbf{x})$ pedig az i-edik célfüggvény. Tekinthettük volna a többcélú programozási feladatot általánosabban is, mégpedig úgy, hogy a k darab célfüggvény közül k_1 darab maximum és k_2 darab minimum, de az egyszerűség miatt minden célfüggvény esetében a minimum mellett döntöttünk. A maximumról a minimumra az áttérés, mint ahogy ismeretes a célfüggvény (-1)-el való szorzásával lehetséges. Bizonyára az olvasóban is megfogalmazódtak a fenti többcélú programozási feladat különböző megoldási lehetőségei. Mint látjuk valóban többféle megoldási elvet követhetünk. Az alábbi fejezetekben a gyakorlatban leginkább alkalmazott megoldási elveket, koncepciókat ismertetjük.

2. A többcélú programozás megoldási koncepciója

A többcélú optimalizálási feladatok megoldásánál legelső kérdésként az vetődik fel, hogy mit nevezünk optimális megoldásnak. Első gondolatunk az lehet, hogy azt a lehetséges megoldást nevezzük optimálisnak, amely mindegyik célfüggvény szempontjából a legjobb. Az ilyen megoldást a többcélú optimalizálási feladat **abszolút optimumának** nevezzük. Ennek meghatározása nem is lenne nehéz, hisz k darab egycélú optimalizálási feladatot kellene megoldani. Az egyes célfüggvények szerinti optimalizálás során azonban szinte minden esetben különböző optimális megoldásokat kapunk, tehát általában nem találunk olyan lehetséges megoldást, amelyik mindegyik cél szempontjából optimális lenne. Ez annál is inkább így van, mivel nagyon sok esetben az egyes célok egymással ellentétesen hatnak. Ahhoz, hogy választ adjunk a többcélú optimalizálási feladatok megoldásának kérdésére, először foglalkozzunk azzal, hogyan lehet két lehetséges megoldást összehasonlítani több célfüggvény figyelembevételével. Egy célfüggvény esetében ez nyilvánvaló, ahogy ezt már az eddigiekből nagyon jól tudjuk. Tekintsük például csak az első célfüggvényt, az $f_1(\mathbf{x})$-et, ekkor két lehetséges megoldás összehasonlítása nem jelent problémát. Ha $\mathbf{a} \in S$ és $\mathbf{b} \in S$ lehetséges megoldásokra $f_1(\mathbf{a}) < f_1(\mathbf{b})$, akkor joggal mondhatjuk, hogy az $\mathbf{a} \in S$ lehetséges megoldás jobb vagy más szóval hatékonyabb, mint a $\mathbf{b} \in S$ lehetséges megoldás. Ha az előző reláció a többi célfüggvényre is fennáll, azaz $f_i(\mathbf{a}) < f_i(\mathbf{b})$ minden i indexre, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a} \in S$ program jobb/hatékonyabb a $\mathbf{b} \in S$ programnál az összes célfüggvény szempontjából.

Ha azonban nem az összes célfüggvényre igaz az utóbbi egyenlőtlenség, például valamelyik célfüggvényre megfordul, akkor az $\mathbf{a} \in S$ és a $\mathbf{b} \in S$ lehetséges megoldásokat nem lehet egyértelműen összehasonlítani. A fentiek alapján elfogadhatjuk az alábbi definíciót, amelynek segítségével két lehetséges program között hatékonysági sorrendet tudunk értelmezni.

1. definíció:
Az $\mathbf{a} \in S$ lehetséges megoldás akkor jobb/hatékonyabb a $\mathbf{b} \in S$ lehetséges megoldásnál, ha $f_i(\mathbf{a}) < f_i(\mathbf{b})$ minden $i = 1, ..., k$ indexre, azaz mindegyik célfüggvény szerint határozottan jobb.

A fenti definíció alapján már két megoldást össze tudunk hasonlítani. Több célfüggvény szerint, így nem lesz nehéz kiválasztani a legjobb ill. a leghatékonyabb megoldást. Nyilvánvalóan azt a megoldást tekintjük legjobbnak, amelynél nem található jobb. Ezt a legjobb/leghatékonyabb megoldást tekintjük a többcélú optimalizálási feladat megoldásának és **gyenge efficiens megoldásnak** nevezzük. Az alábbiakban ezt definiáljuk.

Gyenge efficiens megoldás definíciója:
Az $\mathbf{x}^* \in S$ lehetséges megoldást akkor nevezzük gyenge efficiens megoldásnak, ha nincs olyan $\mathbf{x} \in S$ lehetséges megoldás, amelyre $f_i(\mathbf{x}) < f_i(\mathbf{x}^*)$ minden $i = 1, ..., k$ indexre fennáll, azaz nincs olyan lehetséges megoldás, amely mindegyik célfüggvény szerint határozottan jobb.

Más szavakkal megfogalmazva: Az $\mathbf{x}^* \in S$ lehetséges megoldást akkor nevezzük gyenge efficiens megoldásnak, ha egyszerre egyik célfüggvény értékét sem lehet tovább csökkenteni. Ne feledkezzünk meg arról, hogy az "egyik célfüggvény értékét sem lehet tovább csökkenteni" kijelentés nem azt jelenti, hogy az $\mathbf{x}^*$ megoldás minden célfüggvény szerint optimális. Itt nem az abszolút optimumról van szó, hanem arról, hogy az $\mathbf{x}^*$ megoldáshoz tartozó célfüggvényértékeket nem tudjuk **egyidejüleg** javítani a lehetséges megoldás halmazán. Ezért sem használjuk az optimális megoldás kifejezést a többcélú optimalizálás körében, hanem helyette efficiens megoldást mondunk.

Az olvasóban bizonyára felmerülhet, hogy két lehetséges megoldást több célfüggvény szerint másképpen is össze lehetett volna hasonlítani, azaz más hatékonysági sorrend is értelmezhető. Elfogadható az a definíció is két megoldás összehasonlítására, amely az előzőhöz képest gyengébb feltételt szab, nevezetesen nem azt követeli meg, hogy minden célfüggvény szerint határozottan jobb legyen az egyik megoldás a másiknál, hanem csak azt, hogy legalább egy célfüggvény szerint legyen határozottan jobb, a többi célfüggvény szerint pedig ne legyen rosszabb, tehát egyenlő is lehet. Ennek matematikai definíciója az alábbi:

2. definíció:
Az $\mathbf{a} \in S$ lehetséges megoldás akkor jobb/hatékonyabb a $\mathbf{b} \in S$ lehetséges megoldásnál, ha $f_i(\mathbf{a}) \leqq f_i(\mathbf{b})$ minden $i = 1, ..., k$ indexre, de legalább egy i_0 indexre $f_{i_0}(\mathbf{a}) < f_{i_0}(\mathbf{b})$, azaz egyik célfüggvény szerint sem rosszabb, de legalább egy célfüggvény szerint határozottan jobb.

A fenti értelembenvett hatékonysági sorrend alapján is nyilvánvalóan az a megoldás a legjobb/leghatékonyabb, amelynél nincs jobb. Az ilyen értelemben legjobb megoldást **erős efficiens megoldásnak** vagy más szóval **Pareto-optimális megoldásnak** nevezzük.

Erős efficiens megoldás vagy Pareto-optimális megoldás definíciója:

Az $\mathbf{x}^* \in S$ lehetséges megoldást akkor nevezzük erős efficiens megoldásnak vagy Pareto-optimális megoldásnak, ha nincs olyan $\mathbf{x} \in S$ lehetséges megoldás, amelyre $f_i(\mathbf{x}) \leqq f_i(\mathbf{x}^*)$ minden $i = 1, ..., k$ indexre, de legalább egy i_0 indexre $f_{i_0}(\mathbf{x}) < f_{i_0}(\mathbf{x}^*)$, azaz nincs olyan lehetséges megoldás, amely egyik célfüggvény szerint sem rosszabb, de valamelyik célfüggvény szerint határozottan jobb.

Más szavakkal megfogalmazva: Az $\mathbf{x}^* \in S$ lehetséges megoldást akkor nevezzük erős efficiens megoldásnak vagy Pareto-optimális megoldásnak, ha egyik célfüggvény értékét sem lehet határozottan csökkenteni (javítani), hogy valamelyik célfüggvény értéke ne növekedjen (romoljon). A fenti definíciót Vilfredo Pareto (1848-1923) olasz közgazdász, szociológus fogalmazta meg 1896-ban kiadott "Cours d'Economic Politique" munkájában a társadalmi jólétet vizsgálva. Pareto szerint az egyes népcsoportok jövedelmét (ezek az egyes célfüggvények a mi jelöléseinkben) csak addig célszerű növelni, amíg más népcsoportok jövedelmi szintjében nem mutatkozik visszaesés. Ha elértünk olyan helyzetet, amikor már egyik csoport jövedelme sem növelhető anélkül, hogy valamelyik csoport jövedelme ne csökkenjen, akkor elértük a társadalmi jólét legjobb állapotát.

Megjegyezzük, hogy az erős efficiens megoldás egyúttal gyenge efficiens megoldás is, hiszen ha nincs olyan megoldás, amely legalább egy célfüggvény szerint jobb, a többi szerint nem rosszabb, akkor olyan sincs, amely az összes célfüggvény szerint jobb lenne.

Egy többcélú programozási feladatot megoldani tehát annyit jelent, mint meghatározni a gyenge vagy az erős efficiens megoldásokat. A következőkben módszereket ismertetünk az efficiens megoldások meghatározására.

3. A többcélú programozás megoldási módszerei

Ebben a fejezetben a többcélú programozási feladat megoldásának, vagyis a gyenge vagy erős efficiens pontok meghatározásának néhány alapvető módszerét ismertetjük. Ezeknek a módszereknek az a lényege, hogy a többcélú programozási feladatot egyetlen célfüggvénnyel rendelkező ún. egycélú optimalizálási feladatra vezetjük vissza. Az egycélú programozási feladat optimális megoldása bizonyos feltételek fennállása esetén a többcélú programozási feladat fentebb definiált gyenge vagy erős efficiens megoldását szolgáltatja. A módszereket és a vonatkozó ismereteket tetszőleges célfüggvényekre közöljük, viszont példákat csak a lineáris programozásra vezető feladatok esetében mutatunk be.

3.1. Lineáris kombinációk módszere

Egy többcélú programozási feladatnál általában nem azonos fontossága van az egyes céloknak és ezt legegyszerűbben úgy szokás kezelni, hogy az egyes célfüggvényeket a fontosságuknak megfelelő súlyokkal átlagoljuk. Jelölje s_i az i-edik célfüggvény fontosságát kifejező súlyszámot és képezzünk az alábbi módon egy $F(\mathbf{x})$ célfüggvényt:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} s_i f_i(\mathbf{x}) .$$

Az egyes célfüggvények s_i súlyait (összegük nem feltétlenül egyenlő 1-el) szakmai szempontok alapján állapítják meg. A lineáris kombinációban az egyes célfüggvények értékeit összeadjuk, ami különböző mértékegységek esetén szakmailag elfogadhatatlan, pl. a Ft, óra, m^2 mértékegységű mennyiségek összege értelmezhetetlen. Amennyiben valamennyi célfüggvény hasonló mérőszámú, mondjuk valamilyen pénzegység, de nem azonosak, például az egyik célfüggvény Ft-ban, a másik eFt-ban, a harmadik esetleg más ország pénznemében van megadva, akkor a közös mértékegységre hozás nem jelent problémát. Az esetek nagy részében azonban az egyes célfüggvények különböző mértékegységekben vannak megadva, ekkor az egyes célfüggvényeket mértékegység nélküli mennyiségekké kell átalakítanunk úgy, hogy az eredeti $f_i(\mathbf{x})$ célfüggvények helyett a

$$g_i(\mathbf{x}) = \frac{f_i(\mathbf{x}) - m_i}{M_i - m_i}$$

célfüggvényekkel dolgozunk. A képletben szereplő m_i érték az $f_i(\mathbf{x})$ célfüggvény minimális értékét, az M_i érték pedig az $f_i(\mathbf{x})$ célfüggvény maximális értékét jelenti az S feltételi halmazon. Az m_i és az M_i értékeket egy-egy minimalizálási, ill. maximalizálási feladat megoldásaként kapjuk. Nyilvánvaló, hogy valamennyi $g_i(\mathbf{x})$ függvény értéke 0 és 1 közé esik. A bevezetett $g_i(\mathbf{x})$ függvényeket az $f_i(\mathbf{x})$ célfüggvények $\mathbf{x} \in S$ lehetséges megoldáshoz tartozó **megvalósítási fok**aként is értelmezhetjük, olyan értelemben, hogy minél kisebb a $g_i(\mathbf{x})$ függvényérték az $\mathbf{x}$ pontban, annál inkább közelebb vagyunk célfüggvényérték tekintetében a minimális megoldáshoz.

Most tekintsük a fentiek figyelembevételével megalkotott $F(\mathbf{x})$ célfüggvénnyel az alábbi egycélú optimalizálási feladatot:

$$\begin{gathered} \mathbf{x} \in S \\ F(\mathbf{x}) \rightarrow \min! \end{gathered}$$

ahol

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} s_i f_i(\mathbf{x}) \qquad \text{vagy} \qquad F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} s_i g_i(\mathbf{x})$$

Az alábbiakban megmutatjuk a kapcsolatot ezen egycélú optimalizálási feladat optimális megoldása és a többcélú optimalizálási feladat efficiens megoldása között.

TÉTEL:

(i) Ha minden $s_i > 0$, akkor az egycélú optimalizálási feladat bármely optimális megoldása a többcélú optimalizálási feladat erős efficiens (Pareto-optimális) megoldása.

(ii) Ha minden $s_i \geqq 0$, de legalább egy s_i pozitív, akkor az egycélú optimalizálási feladat bármely optimális megoldása a többcélú optimalizálási feladat gyenge efficiens megoldása.

Bizonyítás:

(i) Legyen $\mathbf{x}^* \in S$ optimális megoldása az egycélú optimalizálási feladatnak. Indirekte tegyük fel, hogy $\mathbf{x}^*$ nem Pareto-optimális megoldás. Ekkor van olyan $\mathbf{x} \in S$, amelyre $f_i(\mathbf{x}) \leqq f_i(\mathbf{x}^*)$ minden $i = 1, ..., k$ indexre, de legalább egy i_0 indexre $f_{i_0}(\mathbf{x}) < f_{i_0}(\mathbf{x}^*)$. Ezek és az $s_i > 0$ alapján írható, hogy

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} s_i f_i(\mathbf{x}) = \sum_{i \neq i_0} s_i f_i(\mathbf{x}) + s_{i_0} f_{i_0}(\mathbf{x}) \leqq \sum_{i \neq i_0} s_i f_i(\mathbf{x}^*) + s_{i_0} f_{i_0}(\mathbf{x}) <$$

$$< \sum_{i \neq i_0} s_i f_i(\mathbf{x}^*) + s_{i_0} f_{i_0}(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{k} s_i f_i(\mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x}^*)$$

Ez pedig ellentmond azzal, hogy az $\mathbf{x}^* \in S$ minimuma legyen az egycélú feladatnak, így mégse létezik a fentiek szerinti $\mathbf{x} \in S$ megoldás, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{x}^* \in S$ Pareto-optimális megoldás.

(ii) A gyenge efficiens megoldásra vonatkozó állítást hasonló módon lehet bizonyítani, ezt az olvasóra bízzuk. **Q.e.d.**

A bizonyítást csak az $f_i(\mathbf{x})$ eredeti célfüggvényekre végeztük, de nyilvánvalóan érvényes a tétel a $g_i(\mathbf{x})$ függvények esetében is, hisz a két függvény optimalizálási szempontból csupán a súlyokban különbözik egymástól.

1. példa:

Egy üzemben két terméket gyártanak. A termékek gyártása két erőforrást igényel, amelyekből rendre 150, ill. 100 mennyiség áll rendelkezésünkre. A technológiai adatok alapján az első termék fajlagos erőforrás-szükséglete az első erőforrásból 1, a második erőforrásból pedig 2, míg a második termék erőforrás-szükséglete erőforrásonként 3, ill. 1 mennyiség. A termékek eladási egységára rendre 7, ill. 3 pénzegység. Az üzem olyan összetételben szeretne gyártani, amelynél az árbevétel is és a gyártott összmennyiség is minél nagyobb legyen. Az egyes célokat az üzem 60 %-os, ill. 40 %-os súlyarányokkal kívánja figyelembe venni.

Megoldás:

Legyen x_1 az első termékből, x_2 a második termékből gyártandó mennyiség. Ekkor a megoldandó többcélú optimalizálási feladat az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leqq 150 \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 100 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_1\mathbf{x} = 7x_1 + 3x_2 \rightarrow \max! \\ f_2(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_2\mathbf{x} = x_1 + x_2 \rightarrow \max! \end{aligned}$$

Mivel az egyes célfüggvények különböző mértékegységben vannak megadva (pénzegység, darab), ezért az egyes célfüggvényeket mértékegység nélküli mennyiségekké alakítjuk át. Az egyes célfüggvények legkisebb és legnagyobb értékei: $m_1 = 0,\ M_1 = 350$, ill. $m_2 = 0,\ M_2 = 70$. Az értékek meghatározását (egy-egy lineáris programozási feladat megoldását) gyakorlásképpen végezze el az olvasó. Itt a célfüggvényekre a maximum előírás van megadva, de ez különösebb gondot nem jelent, hiszen a $g_i(\mathbf{x})$ függvényeket ugyanúgy kell meghatározni és itt is megvalósítási fokként értelmezhetők, olyan értelemben, hogy minél nagyobb a $g_i(\mathbf{x})$ függvényérték az $\mathbf{x}$ pontban, annál inkább közelebb vagyunk célfüggvényérték tekintetében a maximális megoldáshoz.

A többcélú optimalizálási feladathoz tartozó, súlyozással nyert egycélú optimalizálási feladat célfüggvénye a fentiek alapján az alábbi:

$$F(\mathbf{x}) = 60\frac{7x_1 + 3x_2 - 0}{350 - 0} + 40\frac{x_1 + x_2 - 0}{70 - 0}$$

amelyet egyszerűsítés után az alábbiak szerint írhatunk:

$$F(\mathbf{x}) = 31x_1 + 19x_2 \rightarrow \max!$$

Az egycélú optimalizálási feladatot szimplex módszerrel oldjuk meg, közölve az induló és az optimális szimplex táblákat:

	x_1	x_2	
u_1	1	3	150
u_2	2	1	100
	31	19	0

	u_2	u_1	
x_2	-1/5	2/5	40
x_1	3/5	-1/5	30
	-74/5	-7/5	-1690

Az egycélú optimalizálási feladat optimális megoldása: $x_1 = 30, x_2 = 40$. A megoldáshoz tartozó célfüggvényértékek: $f_1(\mathbf{x}) = 330, f_2(\mathbf{x}) = 70$. Mivel mindkét súly pozitív volt, így ez a megoldás a TÉTEL értelmében egyben a többcélú optimalizálási feladat Pareto-optimális megoldása is, ami azt jelenti, hogy a fenti célfüggvényértékek egyikét sem lehet növelni anélkül, hogy a másik célfüggvény értéke ne csökkenjen.

3.2. Korlátok módszere

Tekintsük a legfontosabb célfüggvényt, legyen ez az m-edik. Csak eszerint határozzuk meg az optimális (minimális) megoldást, a többi célfüggvény szerint nem minimalizálunk, hanem megelégszünk azzal, hogy a célfüggvény érékét egy adott szinten tartsuk vagy az alatt maradjon, azaz a többi célfüggvény értékére egy-egy felső korlátot (K_i) írunk elő. Ezek alapján az alábbi egycélú optimalizálási feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\in S \\ f_i(\mathbf{x}) &\leqq K_i \qquad (i \neq m) \\ f_m(\mathbf{x}) &\to \min! \end{aligned}$$

TÉTEL:
Az egycélú optimalizálási feladat bármely optimális megoldása egyúttal a többcélú optimalizálási feladat gyenge efficiens megoldása is.

Bizonyítás:
Legyen $\mathbf{x}^* \in S$ optimális megoldása az egycélú optimalizálási feladatnak. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}^*$ nem gyenge efficiens megoldás. Ekkor van olyan $\mathbf{x} \in S$, amelyre $f_i(\mathbf{x}) < f_i(\mathbf{x}^*)$ minden $i = 1, ..., k$ indexre. Mivel a fenti egyenlőtlenség minden i indexre érvényes, így az $i = m$ indexre is fennáll, hogy $f_m(\mathbf{x}) < f_m(\mathbf{x}^*)$, ami pedig ellentmond azzal, hogy az $\mathbf{x}^* \in S$ az $f_m(\mathbf{x})$ célfüggvény szerint minimális megoldás, így mégsem létezik a fentiek szerinti $\mathbf{x} \in S$ megoldás, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{x}^* \in S$ gyenge efficiens megoldás. **Q.e.d.**

Előfordulhat, hogy az egycélú optimalizálási feladatnak nincs lehetséges megoldása. Ekkor vagy az eredeti S feltételi halmaz üres, vagy pedig túl szigorú korlátokat szabtunk az egyes célfüggvények értékeire, és ezeket egyszerre nem lehet teljesíteni. Ilyenkor a korlátokat növelni kell. A korlátokat szakmai szempontok alapján állapítják meg, sok esetben azonban az egyes célfüggvények minimumának bizonyos százalékában fogalmazzák meg a korlátokat.

2. példa:
Tekintsük az 1. példában szereplő feladat adatait. Határozzuk meg azt a termékösszetételt, amelynél az üzem a legnagyobb árbevételt éri el, a kevésbé fontos második cél esetén pedig azt köti ki, hogy a gyártott termékek száma az elérhető maximális termékmennyiségnek legalább 90%-a legyen.

Megoldás

Az elérhető maximális termékmennyiség 70 darab (az előző példa M_2 adata), így az előírás szerint az üzemnek legalább 63 darab terméket kell gyártania. Az egycélú optimalizálási feladat az alábbiak szerint írható:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leqq 150 \\ 2x_1 + \quad x_2 &\leqq 100 \\ x_1 + \quad x_2 &\geqq 63 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

$$7x_1 + 3x_2 \to \max!$$

A fenti lineáris programozási feladat szimplex módszerrel történő megoldásának induló és optimális szimplex táblája a következő:

	x_1	x_2	v	
u_1	1	3	0	150
u_2	2	1	0	100
u_3^*	1	1	-1	63
	7	3	0	0

	u_2	v	
u_1	2	5	35
x_1	1	1	37
x_2	-1	-2	26
	-4	-1	-337

A korlátok módszerével kapott egycélú optimalizálási feladat optimális megoldása: $x_1 = 37, x_2 = 26$. Az eredeti többcélú optimalizálási feladat célfüggvényeinek ezen megoldáshoz tartozó értékei: $f_1(\mathbf{x}) = 337, f_2(\mathbf{x}) = 63$. A korlátok módszerénél érvényes TÉTEL értelmében ez a megoldás egyben a többcélú optimalizálási feladat gyenge efficiens megoldása is, ami azt jelenti, hogy nem lehet tovább növelni egyszerre a fenti célfüggvényértékeket.

3.3. Kompromisszum programozás

Sok esetben előírjuk, hogy az egyes célfüggvények esetében milyen célfüggvényérték elérése lenne kívánatos. Ezeket az előírt célfüggvény értékeket **célértékeknek** szokás nevezni. A továbbiakban jelölje ezeket a célértékeket rendre $v_1, v_2, ..., v_k$. Ekkor meg kell oldanunk az alábbi feladatot:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\in S \\ f_i(\mathbf{x}) &= v_i \qquad (i = 1, ..., k) \end{aligned}$$

Ha a fenti feladatnak van megoldása, akkor megkaptuk azt a lehetséges megoldást, amely az általunk előírt célfüggvény értékeket szolgáltatja. Amennyiben nincs ilyen lehetséges megoldás, akkor általában olyan lehetséges megoldást keresünk, amelyre az $f_i(\mathbf{x}) - v_i \quad (i = 1, ..., k)$ eltéréseknek valamilyen függvény szerint számított értéke a lehető legkisebb. Az egyes célfüggvényértékeknek az előírt célértékektől való eltérését súlyszámokkal is figyelembe vehetjük, a továbbiakban a súlyokat az s_i pozitív számok jelöljék. A gyakorlatban legtöbbször az alábbi három eset valamelyikét használjuk az eltérések számbavételére.

a) Olyan lehetséges megoldást keresünk, amelynél az $f_i(\mathbf{x}) - v_i$ eltérések súlyozott abszolút értékei közül a legnagyobb is minél kisebb legyen, vagyis az alábbi egycélú optimalizálási feladatot kell megoldani:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\in S \\ F(\mathbf{x}) &= \max_{1 \leqq i \leqq k} \{s_i \, |f_i(\mathbf{x}) - v_i|\} \to \min! \end{aligned}$$

b) Olyan lehetséges megoldást keresünk, amelynél az $f_i(\mathbf{x})-v_i$ eltérések abszolút értékeinek súlyozott összege minimális. Ebben az esetben az alábbi egycélú optimalizálási feladatot kell megoldani:

$$\mathbf{x} \in S$$
$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} s_i \left| f_i(\mathbf{x}) - v_i \right| \to \min!$$

c) Olyan lehetséges megoldást keresünk, amelynél az $f_i(\mathbf{x}) - v_i$ eltérések négyzeteinek súlyozott összege minimális, azaz az alábbi egycélú optimalizálási feladatot kell megoldani:

$$\mathbf{x} \in S$$
$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} s_i \left(f_i(\mathbf{x}) - v_i \right)^2 \to \min!$$

Ezeknek az egycélú optimalizálási feladatoknak az optimális megoldása azonban nem minden esetben szolgáltatja a többcélú optimalizálási feladat valamelyik fajta efficiens megoldását. Amennyiben a v_i célértékekre bizonyos megkötéseket teszünk, akkor már állíthatjuk, hogy az optimális megoldás egyben valamelyik efficiens megoldást szolgáltatja.

Legyenek a v_i célértékek az i-edik célfüggvény szerinti legjobb, vagy esetleg annál is jobb értékek, azaz

$$v_i \leqq \min_{\mathbf{x} \in S} \{f_i(\mathbf{x})\}.$$

A fenti v_i célértékek használata esetén a közölt egycélú optimalizálási feladatokban az abszolút érték jele elhagyható és az abszolút értékes mennyiség helyett a $f_i(\mathbf{x})-v_i$ nemnegatív mennyiség írható.

TÉTEL:
Ha a célértékekre fennáll, hogy $v_i \leqq \min_{\mathbf{x}\in S} \{f_i(\mathbf{x})\}$ minden i indexre és minden s_i súlyérték pozitív, akkor az egycélú optimalizálási feladat bármely optimális megoldása
(i) az a) esetben a többcélú optimalizálási feladat gyenge efficiens megoldása,
(ii) a b) és c) esetekben pedig Pareto-optimális (erős efficiens) megoldása.

Bizonyítás:
a) eset:
Legyen $\mathbf{x}^* \in S$ optimális megoldása az egycélú optimalizálási feladatnak. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}^* \in S$ nem gyenge efficiens megoldás. Ekkor van olyan $\mathbf{x} \in S$, amelyre $f_i(\mathbf{x}) < f_i(\mathbf{x}^*)$ minden $i = 1, ..., k$ indexre. Az s_i súlyokra és a v_i célértékekre fennálló megkötések miatt

$$s_i(f_i(\mathbf{x}) - v_i) < s_i(f_i(\mathbf{x}^*) - v_i)$$

is fennáll minden i indexre, így az egycélú optimalizálási feladat célfüggvényére írható, hogy

$$F(\mathbf{x}) = \max_{1\leqq i\leqq k} \{s_i(f_i(\mathbf{x}) - v_i)\} < \max_{1\leqq i\leqq k} \{s_i(f_i(\mathbf{x}^*) - v_i)\} = F(\mathbf{x}^*)$$

ami pedig ellentmond azzal, hogy az $\mathbf{x}^* \in S$ optimális (minimális) megoldás, így $\mathbf{x}^* \in S$ gyenge efficiens megoldás.

b) eset:
Mivel a célértékekre vonatkozó feltétel miatt írható, hogy

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} s_i \left| f_i\left(\mathbf{x}\right) - v_i \right| = \sum_{i=1}^{k} s_i \left(f_i\left(\mathbf{x}\right) - v_i \right) = \sum_{i=1}^{k} s_i f_i\left(\mathbf{x}\right) - \sum_{i=1}^{k} s_i v_i,$$

azaz az egycélú optimalizálási feladat célfüggvénye konstans tagtól eltekintve nem más mint a lineáris kombinációknál látott célfüggvény. Ekkor pedig a korábbi bizonyítás alapján tudjuk, hogy a tétel igaz.

c) eset:
Legyen $\mathbf{x}^* \in S$ optimális megoldása az egycélú optimalizálási feladatnak. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}^*$ nem Pareto-optimális megoldás. Ekkor van olyan $\mathbf{x} \in S$, amelyre $f_i(\mathbf{x}) \leqq f_i(\mathbf{x}^*)$ minden $i = 1, ..., k$ indexre, de legalább egy i_0 indexre $f_{i_0}(\mathbf{x}) < f_{i_0}(\mathbf{x}^*)$. Ezen összefüggések, az s_i súlyok pozitivitása és a v_i célértékekre fennálló megkötések miatt írható, hogy

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} s_i \left(f_i\left(\mathbf{x}\right) - v_i \right)^2 = \sum_{i \neq i_0} s_i \left(f_i\left(\mathbf{x}\right) - v_i \right)^2 + s_{i_0} \left(f_{i_0}\left(\mathbf{x}\right) - v_{i_0} \right)^2 \leqq \\
\leqq \sum_{i \neq i_0} s_i \left(f_i\left(\mathbf{x}^*\right) - v_i \right)^2 + s_{i_0} \left(f_{i_0}\left(\mathbf{x}\right) - v_{i_0} \right)^2 < \\
< \sum_{i \neq i_0} s_i \left(f_i\left(\mathbf{x}^*\right) - v_i \right)^2 + s_{i_0} \left(f_{i_0}\left(\mathbf{x}^*\right) - v_{i_0} \right)^2 = \sum_{i=1}^{k} s_i \left(f_i\left(\mathbf{x}^*\right) - v_i \right)^2 = F(\mathbf{x}^*)
\end{aligned}$$

Ebből pedig látható az ellentmondás, tehát az $\mathbf{x}^*$ egycélú optimális megoldás Pareto-optimális megoldás. **Q.e.d.**

Hangsúlyozzuk, hogy az egycélú optimalizálási feladatnak bármilyen célérték esetén van értelmes megoldása (az előírt célértékekhez valamilyen függvény szerinti legközelebbi megoldás), de csak akkor garantálható teljes bizonyossággal, hogy ez egyben a többcélú optimalizálási feladat valamilyen típusú efficiens megoldása, ha a célértékekre a $v_i \leqq \min_{\mathbf{x} \in S} \left\{ f_i\left(\mathbf{x}\right) \right\}$ fennáll.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogyan kell kezelni a fenti egycélú optimalizálási feladatokban az abszolút értékeket. Mindegyik esetben külön vizsgáljuk azokat az eseteket, amikor a célértékekre igaz a $v_i \leqq \min_{\mathbf{x} \in S} \left\{ f_i\left(\mathbf{x}\right) \right\}$ feltétel, ill. amikor nem. Példákat mutatunk be azokra az esetre, amikor a megfelelő egycélú optimalizálási feladatok lineáris programozási feladatra vezetnek, vagyis abban az esetben, ha az $f_i(\mathbf{x})$ célfüggvények lineárisak és az S feltételi halmaz lineáris egyenletrendszerrel, ill. egyenlőtlenségrendszerrel adott. A következőkben bemutatandó megoldási módszerek mindegyikében ugyanazt a feladatot használjuk, legyen ez a többcélú optimalizálási feladat a következő:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leqq 4 \\
3x_1 + 2x_2 &\leqq 9 \\
x_1, x_2 &\geqq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{c}_1\mathbf{x} &= x_1 + 2x_2 \rightarrow \max! \\
f_2\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{c}_2\mathbf{x} &= 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \max!
\end{aligned}$$

Ahhoz, hogy a fentiekben szereplő célértékekre útmutatást kapjunk, meg kell oldani az egyes célfüggvényekkel egy-egy lineáris programozási feladatot. Ezek megoldása a következő:

Az $f_1(\mathbf{x})$ célfüggvény esetén az optimális megoldás: $x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ f_1(\mathbf{x})_{\max} = 8$.

Az $f_2(\mathbf{x})$ célfüggvény esetén az optimális megoldás: $x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ f_2(\mathbf{x})_{\max} = 21$.

A a) esetbeli egycélú optimalizálási feladat vizsgálata:

Az egycélú optimalizálási feladat:

$$\begin{gathered}\mathbf{x} \in S \\ F(\mathbf{x}) = \max_{1 \leqq i \leqq k} \{s_i \, |f_i(\mathbf{x}) - v_i|\} \rightarrow \min!\end{gathered}$$

(**a1**) Tekintsük először azt az esetet, amikor a célértékekre a $v_i \leqq \min_{\mathbf{x}\in S} \{f_i(\mathbf{x})\}$ összefüggés fennáll. Vezessük be a z nemnegatív változót a célfüggvényre, azaz legyen

$$z = \max_{1 \leqq i \leqq k} \{s_i \, (f_i(\mathbf{x}) - v_i)\} \,.$$

Ez azt jelenti, hogy az új z változóra az alábbi egyenlőtlenségek állnak fenn:

$$s_i \, (f_i(\mathbf{x}) - v_i) \leqq z \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

és ezt a z nemnegatív változót kell minimalizálni. A fentiek alapján tehát az alábbi programozási feladathoz jutunk:

$$\begin{gathered}\mathbf{x} \in S \\ f_i(\mathbf{x}) - \frac{1}{s_i} z \leqq v_i \quad (i = 1, ..., k) \\ z \rightarrow \min!\end{gathered}$$

Megjegyezés a maximum feladat kezeléséhez. A $v_i \leqq \min_{\mathbf{x}\in S} \{f_i(\mathbf{x})\}$ összefüggés helyett itt a $v_i \geqq \max_{\mathbf{x}\in S} \{f_i(\mathbf{x})\}$ összefüggést kell alkalmazni és a bevezetett új feltétel a

$$f_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{s_i} z \geqq v_i \quad (i = 1, ..., k)$$

alakra módosul. Ezek ellenőrzését az olvasó egyszerűen elvégezheti.

3. példa:

Válasszuk az egyes célfüggvények célértékeit a maximális célfüggvény értékekre, legyen tehát $v_1 = 8$, $v_2 = 21$. Az egyszerűség kedvéért válasszuk most a súlyokat 1-nek. Ekkor az alábbi lineáris programozási feladatot kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 \qquad &\leqq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad &\leqq 9 \\ x_1 + 2x_2 + z &\geqq 8 \\ 6x_1 + 5x_2 + z &\geqq 21 \\ x_1, x_2, z &\geqq 0 \\ z &\rightarrow \min! \end{aligned}$$

A lineáris programozás megoldási módszereivel kapcsolatos ismereteink szerint minden olyan LP feladat egyszerűen elindítható duál módszerrel, amelynek feltételei között nincs egyenlőség és a célfüggvény-együtthatók nemnegatívak. A fenti LP feladat is ilyen, így duál módszerrel oldhjuk meg. Az alábbiakban az induló és az optimális szimplex táblát közöljük:

	x_1	x_2	z	
u_1	1	1	0	4
u_2	3	2	0	9
u_3	-1	-2	-1	-8
u_4	-6	-5	-1	-21
	0	0	-1	0

	u_3	u_1	u_4	
x_2	-1/2	5/2	1/2	7/2
u_2	-1/2	-1/2	1/2	1/2
x_1	1/2	3/2	-1/2	1/2
z	-1/2	-7/2	-1/2	1/2
	-1/2	-7/2	-1/2	1/2

A lineáris programozási feladat optimális megoldása: $x_1 = 0.5, x_2 = 3.5, z = 0.5$. A TÉTEL értelmében a többcélú optimalizálási feladat gyenge efficiens megoldása: $x_1 = 0.5, x_2 = 3.5, f_1(\mathbf{x}) = 7.5, f_2(\mathbf{x}) = 20.5$. Az $\mathbf{x} = (0.5, 3.5)$ megoldás tehát egyrészről olyan, hogy a hozzátartozó célfüggvény értékek legfeljebb $z = 0.5$-el térnek el az előírt célértékektől, másrészről pedig olyan, hogy nem lehet az első célfüggvény értékét 7.5-nél, a második célfüggvény értékét pedig 20.5-nél nagyobb értékre javítani egyidejűleg.

(**a2**) Most pedig legyenek a célértékek olyanok, hogy a $v_i \leqq \min_{\mathbf{x}\in S}\{f_i(\mathbf{x})\}$ összefüggés nem áll fenn. Az előzőekhez hasonló módon vezessük be a z nemnegatív változót a célfüggvényre, ami azt jelenti, hogy az új z változóra az alábbi egyenlőtlenségek állnak fenn:

$$s_i\,|f_i(\mathbf{x}) - v_i| \leqq z \qquad (i = 1, ..., k)$$

és ezt a z nemnegatív változót kell minimalizálni. A fenti egyenlőtlenségek ekvivalensek az alábbiakkal:

$$-\frac{1}{s_i}z \leqq f_i(\mathbf{x}) - v_i \leqq \frac{1}{s_i}z \qquad (i = 1, ..., k)$$

A megoldandó programozási feladat a következő:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\in S \\ f_i(\mathbf{x}) - \frac{1}{s_i}z &\leqq v_i \qquad (i = 1, ..., k) \\ f_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{s_i}z &\geqq v_i \qquad (i = 1, ..., k) \\ z &\to \min! \end{aligned}$$

Maximum feladat esetében is ugyanerre az optimalizálási feladathoz jutunk.

4. példa:

A célértékek legyenek $v_1 = 7, v_2 = 20$, vagyis a maximális értéktől kisebbek. Az egyszerűség kedvéért itt is válasszuk a súlyokat 1-nek. A fenti levezetésünk alapján az alábbi lineáris programozási feladatot kell megoldani:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 \phantom{{}- z} &\leqq 4 \\
3x_1 + 2x_2 \phantom{{}- z} &\leqq 9 \\
x_1 + 2x_2 - z &\leqq 7 \\
x_1 + 2x_2 + z &\geqq 7 \\
6x_1 + 5x_2 - z &\leqq 20 \\
6x_1 + 5x_2 + z &\geqq 20 \\
x_1, x_2, z &\geqq 0 \\
z &\to \min!
\end{aligned}$$

Az alábbiakban az induló és az optimális szimplex táblát közöljük. A megoldást szintén duál módszerrel végezhetjük.

	x_1	x_2	z	
u_1	1	1	0	4
u_2	3	2	0	9
u_3	1	2	-1	7
u_4	-1	-2	-1	-7
u_5	6	5	-1	20
u_6	-6	-5	-1	-20
	0	0	-1	0

	u_4	u_5	z	
u_1	1/7	-1/7	0	1/7
u_2	-3/7	-4/7	1	4/7
u_3	1	0	-2	0
x_1	5/7	2	-1	5/7
x_2	-6/7	-1/7	1	22/7
u_6	0	1	-2	0
	0	0	-1	0

A lineáris programozási feladat optimális megoldása: $x_1 = 5/7$, $x_2 = 22/7$, $z = 0$. A $z = 0$ az jelenti, hogy a célfüggvények mindegyike elérte a megadott célértéket. Mivel a v_i célértékekre nem teljesül a megkötés, így erről a megoldásról nem állíthatjuk egyértelműen, hogy a többcélú optimalizálási feladat gyenge efficiens megoldása. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a fenti megoldás nem lehet gyenge efficiens megoldás, hiszen ha például az $\mathbf{x} = (0.8, 3.2)$ lehetséges megoldást tekintjük, amelyre $f_1(\mathbf{x}) = 7.2$, $f_2(\mathbf{x}) = 20.8$, vagyis mindegyik célfüggvény értéke javult az $\mathbf{x} = (5/7, 22/7)$ megoldáshoz tartozó $f_1(\mathbf{x}) = 7$, $f_2(\mathbf{x}) = 20$ célfüggvény értékekhez képest.

A b) esetbeli egycélú optimalizálási feladat vizsgálata:
Az egycélú optimalizálási feladat:

$$\mathbf{x} \in S$$

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} s_i \left| f_i(\mathbf{x}) - v_i \right| \to \min!$$

(**b1**) Legyenek a célértékek olyanok, hogy a $v_i \leqq \min_{\mathbf{x} \in S} \{f_i(\mathbf{x})\}$ összefüggés fennáll. Ebben az esetben, mint ahogy a bizonyításnál láttuk a lineáris kombinációk módszerére vezetjük vissza a feladatot.

5. példa:
Válasszuk az egyes célfüggvények célértékeit a maximális célfüggvény értékekre. Így a célértékek $v_1 = 8$, $v_2 = 21$. Az első célfüggvényt kétszer olyan súllyal vegyük figyelembe, mint a másodikat, vagyis legyen $s_1 = 2$, $s_2 = 1$. Ez esetben az egycélú optimalizálási feladat célfüggvénye:

$$F(\mathbf{x}) = 2(8 - x_1 - 2x_2) + 1(21 - 6x_1 - 5x_2) = -8x_1 - 9x_2 + 37 \to \min!$$

Az egycélú feladat tehát az alábbi lineáris programozási feladatra vezet:

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 &\leqq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqq 9 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \\ 8x_1 + 9x_2 &\to \max! \end{aligned}$$

A lineáris programozási feladat optimális megoldása: $x_1 = 0,\ x_2 = 4$. A TÉTEL értelmében a többcélú optimalizálási feladat Pareto-optimális (erős efficiens) megoldása: $x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ f_1(\mathbf{x}) = 8,\ f_2(\mathbf{x}) = 20$. Az $\mathbf{x} = (0, 4)$ megoldás tehát egyrészről olyan, hogy az előírt célértékek és a megoldáshoz tartozó célfüggvény értékek különbségeinek súlyozott összege 1 (és nincs olyan megoldás, amelynél ennél kisebb lenne), másrészről pedig olyan, hogy ha az egyik célfüggvény értékét növelni akarnánk, akkor a másik célfüggvény értéke biztosan csökken.

(**b2**) Legyenek most a célértékek olyanok, hogy a $v_i \leqq \min_{\mathbf{x}\in S} \{f_i(\mathbf{x})\}$ összefüggés nem áll fenn. Ez sokkal bonyolultabb eset, mivel az egycélú optimalizálási feladat célfüggvényében szereplő abszolút érték nem hagyható el, vagyis az $f_i(\mathbf{x}) - v_i$ mennyiségek az S feltételi halmazon pozitívok és negatívok is lehetnek. Ezt a kompromisszum programozási feladatot csak abban az esetben vizsgáljuk, ha az $f_i(\mathbf{x})$ célfüggvények lineárisak, azaz $f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_i\mathbf{x}$ és az S feltételi halmaz konvex poliéder, vagyis lineáris egyenletrendszerrel, ill. egyenlőtlenségrendszerrel adott. A többcélú optimalizálási feladat ekkor az alábbi alakú:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_i\mathbf{x} &\to \min! \qquad (i = 1, ..., k) \end{aligned}$$

az ehhez tartozó egycélú optimalizálási feladat pedig a következő:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \\ \sum_{i=1}^{k} s_i \left|\mathbf{c}_i\mathbf{x} - v_i\right| &\to \min! \end{aligned}$$

Az egycélú optimalizálási feladat célfüggvényében szereplő $|\mathbf{c}_i\mathbf{x} - v_i|$ mennyiségekre vezessünk be egy z_i^- és egy z_i^+ nemnegatív változót attól függően, hogy az abszolút értéken belüli $\mathbf{c}_i\mathbf{x} - v_i$ mennyiség negatív vagy pozitív, azaz $\mathbf{c}_i\mathbf{x} - v_i = -z_i^-$, ha $\mathbf{c}_i\mathbf{x} - v_i < 0$, ill. $\mathbf{c}_i\mathbf{x} - v_i = z_i^+$, ha $\mathbf{c}_i\mathbf{x} - v_i \geqq 0$, ami azt jelenti, hogy vagy a $\mathbf{c}_i\mathbf{x} - v_i + z_i^- = 0$, vagy a $\mathbf{c}_i\mathbf{x} - v_i - z_i^+ = 0$ összefüggések érvényesek. Mivel a z_i^- és a z_i^+ nemnegatív változók közül csak egyik lehet pozitív, így az utóbbi két összefüggés helyett a $\mathbf{c}_i\mathbf{x} - v_i + z_i^- - z_i^+ = 0$ is írható, az egycélú feladat célfüggvénye pedig a $\sum_{i=1}^{k} s_i \left(z_i^- + z_i^+\right)$ alakban írható. Az egycélú optimalizálási feladat tehát az alábbi lineáris programozási feladatra vezet:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{c}_i\mathbf{x} + z_i^- - z_i^+ &= v_i \qquad (i = 1, ..., k) \\ z_i^-, z_i^+ &\geqq 0 \qquad (i = 1, ..., k) \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \left(z_i^- + z_i^+\right) \rightarrow \text{min!}$$

A lineáris programozási feladat megoldása során olyan eset soha nem fordulhat elő, hogy valamilyen i-re z_i^- és z_i^+ is pozitív lenne. Ez ugyanis azt jelentené, hogy mindkettő bázisba kerülne, ami lehetetlenség, hisz a feltételeket vizsgálva látható, hogy a z_i^- és z_i^+ ismeretlenek együtthatóvektorai lineárisan nem függetlenek egymástól (egyik a másiknak (-1)-szerese), így a kettő együtt a lineárisan független bázisba nem kerülhet.

Abban az esetben, ha a célértékek egy részére teljesül a $v_i \leqq \min_{\mathbf{x}\in S}\{\mathbf{c}_i\mathbf{x}\}$ feltétel, akkor természetesen ezeknél az indexeknél nincs szükség a z_i^- és z_i^+ új változók bevezetésére. Tegyük fel, hogy az első k_1 darab célértékre nem teljesül a $v_i \leqq \min_{x\in S}\{f_i(\mathbf{x})\}$ feltétel, a többire pedig teljesül. Ekkor az alábbi lineáris programozási feladatot kell megoldani:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{c}_i\mathbf{x} + z_i^- - z_i^+ &= v_i \qquad (i = 1, ..., k_1) \\ z_i^-, z_i^+ &\geqq 0 \qquad (i = 1, ..., k_1) \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{k_1} s_i \left(z_i^- + z_i^+\right) + \sum_{i=k_1+1}^{k} s_i \left(\mathbf{c}_i\mathbf{x} - v_i\right) \rightarrow \text{min!}$$

Maximum feladatnál nincs változás, mivel z_i^- ebben az esetben is azt jelenti, hogy a célfüggvényérték kisebb, mint a célérték, z_i^+ pedig értelemszerűen azt, hogy nagyobb.

Megjegyezzük, hogy az abszolútérték kezelésének másik fajta módszere is ismert. Vezessünk be most feltételenként csak egy új változót, jelölje ezt a z_i nemnegatív változó, amely legyen olyan, hogy

$$|\mathbf{c}_i\mathbf{x} - v_i| \leqq z_i$$

a feltételi halmaz minden pontjában. A fenti definíció szerint írható, hogy

$$-z_i \leqq \mathbf{c}_i\mathbf{x} - v_i \leqq z_i$$

amely két feltételnek felel meg. Az egycélú feladat célfüggvénye pedig $\sum_{i=1}^{k} s_i z_i$ alakban írható.

Ebben az esetben az alábbi lineáris programozási feladatot kell megoldani:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{c}_i\mathbf{x} - z_i &\leqq v_i \qquad (i = 1, ..., k) \\ \mathbf{c}_i\mathbf{x} + z_i &\geqq v_i \qquad (i = 1, ..., k) \\ z_i &\geqq 0 \qquad (i = 1, ..., k) \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \\ \sum_{i=1}^{k} s_i z_i &\rightarrow \min! \end{aligned}$$

A két módszer különbsége abban áll, hogy az elsőnél célfüggvényenként két új változóval és egy új feltétellel, míg a másodiknál egy új változóval és két új feltétellel bővül a feladat.

6. példa:

A v_i célértékeket a maximális értéktől kisebbre választjuk. Legyenek a célértékek: $v_1 = 7.75$, $v_2 = 20.75$. Az első módszer szerint az alábbi lineáris programozási feladathoz jutunk:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 & & &\leqq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 & & &\leqq 9 \\ x_1 + 2x_2 + z_1^- - z_1^+ & & &= 7.75 \\ 6x_1 + 5x_2 & + z_2^- - z_2^+ & &= 20.75 \\ x_1, x_2, z_1^-, z_1^+, z_2^-, z_2^+ &\geqq 0 \\ 2\left(z_1^- + z_1^+\right) + z_2^- + z_2^+ &\rightarrow \min! \end{aligned}$$

Az alábbiakban az induló és az optimális szimplex táblát közöljük. Vegyük figyelembe, hogy a z_1^- és a z_2^- változók azonnal bázisba hozhatók.

	x_1	x_2	z_1^+	z_2^+	
u_1	1	1	0	0	4
u_2	3	2	0	0	9
z_1^-	1	2	-1	0	7.75
z_2^-	6	5	0	-1	20.75
	8	9	-4	-21	0

	u_1	z_1^-	z_1^+	z_2^+	
x_1	2	-1	1	0	0.25
u_2	-4	1	-1	0	0.75
x_2	-1	1	-1	0	3.75
z_2^-	-7	1	-1	-1	0.5
	-7	-1	-3	-2	0.5

A lineáris programozási feladat optimális megoldása: $x_1 = 0.25, x_2 = 3.75, z_2^- = 0.5$. Az $\mathbf{x} = (0.25, 3.75)$ megoldás olyan, hogy az előírt célértékek és a megoldáshoz tartozó célfüggvény értékek különbségei abszolút értékeinek súlyozott összege 0.5. Ez a megoldás van legközelebb a célértékekhez az eltérések abszolút értékeinek súlyozott összegét tekintve. Mivel a v_i célértékekre nem teljesül a megkötés, így erről a megoldásról nem állíthatjuk egyértelműen, hogy a többcélú optimalizálási feladat Pareto-optimális (erős efficiens) megoldása, vagyis elképzelhető olyan lehetséges megoldás, amelyre az egyik célfüggvény értéke javul, a másik pedig nem romlik az $\mathbf{x} = (0.25, 3.75)$ megoldáshoz tartozó $f_1(\mathbf{x}) = 7.75, f_2(\mathbf{x}) = 20.25$ célfüggvény értékekhez képest.

A c) esetbeli egycélú optimalizálási feladat vizsgálata:

Az egycélú optimalizálási feladat:

$$\mathbf{x} \in S$$

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} s_i \left(f_i\left(\mathbf{x}\right) - v_i\right)^2 \rightarrow \min!$$

A négyzetre emelés miatt nem kell kétfelé bontani a feladatot, attól függően, hogy a célértékekre a $v_i \leqq \min_{\mathbf{x} \in S} \{f_i(\mathbf{x})\}$ összefüggés fennáll vagy sem. A maximum feladat is ugyanúgy kezelhető, mint a minimum feladat. Amennyiben az S feltételi halmaz konvex poliéder és a célfüggvények lineárisak, akkor kvadratikus programozási feladatra vezet a probléma, mégpedig az egycélú optimalizálási feladat célfüggvénye konvex kvadratikus függvény lesz, amelyet az alábbiakban igazolunk.

Legyen a $\mathbf{C} \in R^{k \times n}$ mátrix olyan, amelynek sorvektorai az egyes célfüggvényegyütthatók, legyenek a $\mathbf{D} \in R^{n \times n}$ diagonális mátrix diagonális elemei az egyes súlyok, célértékeket pedig foglaljuk a $\mathbf{v} \in R^n$ vektorba, ekkor az egycélú optimalizálási feladat célfüggvénye mátrix-vektor jelölésekkel az alábbi

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} s_i \left(\mathbf{c}_i \mathbf{x} - v_i\right)^2 = (\mathbf{Cx} - \mathbf{v})^T \mathbf{D} (\mathbf{Cx} - \mathbf{v}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C}) \mathbf{x} - 2(\mathbf{v}^T \mathbf{D} \mathbf{C}) \mathbf{x} + \mathbf{v}^T \mathbf{D} \mathbf{v}.$$

A $\mathbf{C}^T\mathbf{DC}$ mátrix pozitív szemidefinit, ami a konvexitást igazolja. A megoldandó kvadratikus programozási feladat, kanonikus alakot feltételezve a következő

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\geqq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \\ -(\mathbf{v}^T\mathbf{DC})\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{DC})\mathbf{x} &\rightarrow \min! \end{aligned}$$

7. példa

Legyenek a célértékek a maximális értékek, azaz $v_1 = 8$, $v_2 = 21$ és a súlyok $s_1 = 2$, $s_2 = 1$. A példában a $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ mátrix, ill. a $\mathbf{v}$ vektor az alábbi:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

A kvadratikus feladat célfüggvényében szereplő mátrix, ill. vektor a következő:

$$\mathbf{C}^T\mathbf{DC} = \begin{bmatrix} 38 & 32 \\ 32 & 27 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}^T\mathbf{DC} = \begin{bmatrix} 142 & 137 \end{bmatrix}.$$

A megoldandó kvadratikus probléma:

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 &\leqq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqq 9 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \\ -142x_1 - 137x_2 + \tfrac{1}{2}(38x_1^2 + 68x_1x_2 + 33x_2^2) &\rightarrow \min! \end{aligned}$$

A feladatot a konvex kvadratikus programozási feladatra kidolgozott criss-cross módszerrel oldjuk meg. A módszerhez tartozó induló táblát és az optimális táblát az alábbiakban közöljük:

	y_1	y_2	x_1	x_2	
$\bar{y}_1$	0	0	1	1	4
$\bar{y}_2$	0	0	3	2	9
$\bar{x}_1$	-1	-3	-38	-34	-142
$\bar{x}_2$	-1	-2	-34	-33	-137

	y_1	$\bar{y}_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	
$\bar{y}_1$	$-\frac{98}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{14}{3}$
y_2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$

A kvadratikus programozási feladat optimális megoldása: $x_1 = \frac{1}{3} \approx 0.33$, $x_2 = \frac{11}{3} \approx 3.67$. A TÉTEL értelmében a többcélú optimalizálási feladat Pareto-optimális (erős efficiens) megoldása: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{11}{3}$, $f_1(\mathbf{x}) = \frac{23}{3} \approx 7.67$, $f_2(\mathbf{x}) = \frac{61}{3} \approx 20.33$. Az $\mathbf{x} = (\frac{1}{3}, \frac{11}{3})$ megoldás tehát egyrészről olyan, hogy az előírt célértékek és a megoldáshoz tartozó célfüggvény értékek különbségeinek súlyozott négyzetösszege $\frac{2}{3}$ (és nincs olyan megoldás, amelynél ennél kisebb lenne), másrészről pedig olyan, hogy ha az egyik célfüggvény értékét növelni akarnánk, akkor a másik célfüggvény értéke biztosan csökken.

8. példa

Legyenek a célértékek a maximális értéktől kisebbek, $v_1 = 7.75$, $v_2 = 20.75$ és a súlyok változatlanul $s_1 = 2$, $s_2 = 1$. Ekkor a kvadratikus programozási feladat célfüggvényében csupán a lineáris tag változik, amely a következő:

$$\mathbf{v}^T\mathbf{DC} = \begin{bmatrix} 140.00 & 134.75 \end{bmatrix}$$

A criss-cross módszerhez tartozó induló tábla és az optimális tábla az alábbi:

	y_1	y_2	x_1	x_2	
$\bar{y}_1$	0	0	1	1	4
$\bar{y}_2$	0	0	3	2	9
$\bar{x}_1$	-1	-3	-38	-34	-140
$\bar{x}_2$	-1	-2	-34	-33	-134.75

	y_1	$\bar{y}_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	
$\bar{y}_1$	$-\frac{98}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$
y_2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{175}{300}$
x_1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{125}{300}$
x_2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1075}{300}$

A kvadratikus programozási feladat optimális megoldása: $x_1 = \frac{125}{300} \approx 0.4167$, $x_2 = \frac{1075}{300} \approx 3.5833$. Az $\mathbf{x} = (\frac{125}{300}, \frac{1075}{300})$ megoldás olyan, hogy az előírt célértékek és a megoldáshoz tartozó célfüggvény értékek különbségeinek súlyozott négyzetösszege $\frac{1}{6}$. Ez a megoldás van legközelebb a célértékekhez az eltérések négyzetének súlyozott összegét tekintve. Mivel a v_i célértékekre nem teljesül a megkötés, így erről a megoldásról nem állíthatjuk egyértelműen, hogy a többcélú optimalizálási feladat Pareto-optimális (erős efficiens) megoldása, vagyis elképzelhető olyan lehetséges megoldás, amelyre az egyik célfüggvény értéke javul, a másik pedig nem romlik az $\mathbf{x} = (\frac{125}{300}, \frac{1075}{300})$ megoldáshoz tartozó $f_1(\mathbf{x}) = \frac{2275}{3} \approx 7.5833$, $f_2(\mathbf{x}) = \frac{6125}{3} \approx 20.4167$ célfüggvény értékekhez képest.

3.4. Egyéb megoldási módszerek

Az alábbiakban az eddig felsoroltakon kívül néhány megoldási módszert ismertetünk. Ezekre külön nem oldunk meg feladatot, mivel az előzőekkel szoros kapcsolatban vannak, így az előző pontokban ismertetett módszerek megértése után az olvasó könnyűszerrel kezelni tudja ezeket a megoldási módszereket is.

3.4.1. Norma alkalmazása

A kompromisszum programozási módszernél háromféle megoldási módot mutattunk be. Ezek általánosításaként az l_p normát a következőképpen definiálják

$$\Phi_p(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{k} s_i \left| f_i\left(\mathbf{x}\right) - v_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

ahol $p \geqq 1$. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az ismertetett a) eset a $p = \infty$, a b) eset a $p = 1$ és a c) eset pedig a $p = 2$ választásnak felel meg. Az l_p normát választva az egycélú optimalizálási feladat célfüggvényének, akkor az alábbi kapcsolat mondható ki az egycélú optimalizálási feladat és a többcélú optimalizálási feladatközött.

TÉTEL:
Ha a célértékekre fennáll, hogy $v_i \leqq \min_{x \in S} \{f_i(\mathbf{x})\}$ minden i indexre és minden s_i súlyérték pozitív, akkor az

$$x \in S$$

$$\Phi_p(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{k} s_i \left| f_i(\mathbf{x}) - v_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \to \min!$$

egycélú optimalizálási feladat bármely optimális megoldása
(i) a $p = \infty$ esetben a többcélú optimalizálási feladat gyenge efficiens megoldása,
(ii) $p \geqq 1$ esetekben pedig Pareto-optimális (erős efficiens) megoldása.

3.4.2. Monoton függvény alkalmazása

Tekintsünk a $H(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ valós függvényt, amelynek segítségével az alábbi módon határozzuk meg az egycélú optimalizálási feladat célfüggvényét

$$F(\mathbf{x}) = H(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x}))$$

TÉTEL:
(i) Ha a $H(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ függvény minden változójában szigorúan monoton növekvő, akkor az egycélú optimalizálási feladat bármely optimális megoldása a többcélú optimalizálási feladat Pareto-optimális (erős efficiens) megoldása.
(ii) Ha a $H(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ függvény minden változójában monoton növekvő, de legalább egy változójában szigorúan monoton növekvő, akkor az egycélú optimalizálási feladat bármely optimális megoldása a többcélú optimalizálási feladat gyenge efficiens megoldása.

A tétel bizonyítása hasonlóan végezhető, mint ahogy azt korábban tettük. Tulajdonképpen elegendő lett volna ennek az egy tételnek a bizonyítása, mivel az ismertetett módszerek erre vezethetők vissza.

Ez a H függvény a lineáris kombinációk módszerénél $H(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x})) = \sum s_i f_i(\mathbf{x})$. A H függvény tehát egy lineáris függvény, amely minden változójában akkor szigorúan monoton növekvő, ha minden $s_i > 0$, így ott Pareto optimális megoldást ad az egycélú feladat optimális megoldása.

A korlátok módszerénél $H(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x})) = f_m(\mathbf{x})$, azaz csak az m-edik változóban érvényes a szigorú monoton növekedés, így ott gyenge efficiens megoldást szolgáltat az egycélú feladat optimális megoldása.

A l_p norma alkalmazásánál pedig akkor beszélhetünk szigorú monoton növekedésről, ha $v_i \leqq \min_{\mathbf{x} \in S} \{f_i(\mathbf{x})\}$, így ekkor kapunk Pareto optimális megoldást.

3.4.3. Legrosszabb célelőírás

Az előző fejezetben megismert kompromisszum programozási módszer alapötletét használva, úgy is okoskodhatunk, hogy a többcélú optimalizálási feladat olyan megoldását keressük, amely egy előre megadott $v_1, v_2, ..., v_k$ célfüggvényértéktől a lehető legnagyobb mértékben tér el. Az eltérés mérésére a kompromisszum programozásnál megismert mértékeket szokták használni. Természetesen itt is használhatunk súlyozást az eltérések figyelembevételénél. Az egycélú optimalizálási feladat:

$$\begin{gathered} \mathbf{x} \in S \\ \Phi\left(s_i\left(f_i\left(\mathbf{x}\right) - v_i\right)\right) \rightarrow \max! \end{gathered}$$

ahol a Φ függvény a kompromisszum programozásnál megismert a), b) és c) esetbeli függvények valamelyikét jelöli, azzal a különbséggel, hogy a c) esetben minimumképzésről van szó. Az alábbiakban bizonyítás nélkül ismertetjük a feladatra vonatkozó tételt.

TÉTEL:
Ha a célértékekre fennáll, hogy $v_i \geqq \max_{\mathbf{x}\in S}\{\mathbf{c}_i\mathbf{x}\}$ minden i-re és minden s_i súlyérték pozitív, akkor az egycélú optimalizálási feladat bármely optimális megoldása
– az a) esetben a többcélú optimalizálási feladat gyenge efficiens megoldása,
– a b) és c) esetekben pedig Pareto-optimális (erős efficiens) megoldása.

3.4.4. Megvalósítási fok szerinti optimalizálás

Az előző fejezetekben megismert célfüggvény-megvalósítási fok segítségével olyan módon is kereshetjük a többcélú optimalizálási feladat megoldását, hogy a legrosszabb megvalósítási fok is minél jobb legyen, azaz az alábbi optimalizálási feladatot kell megoldanunk:

$$\begin{gathered} \mathbf{x} \in S \\ \max_{1\leqq i\leqq k}\left\{g_i\left(\mathbf{x}\right)\right\} \rightarrow \min! \end{gathered}$$

Az olvasó könnyen meggyőződhet arról, hogy ez tulajdonképpen a kompromisszum megoldási módszer c) esete a $v_i = m_i = \min_{\mathbf{x}\in S}\{f_i(\mathbf{x})\}$ és az $s_i = \frac{1}{M_i - m_i}$ választás mellett. Így az előző TÉTEL értelmében a fenti egycélú optimalizálási feladat optimális megoldása a többcélú optimalizálási feladat gyenge efficiens megoldása.

Maximum feladat esetén a megvalósítási fok minél kisebb annál rosszabb, így a feladat:

$$\begin{gathered} \mathbf{x} \in S \\ \min_{1\leqq i\leqq k}\left\{g_i\left(\mathbf{x}\right)\right\} \rightarrow \max! \end{gathered}$$