DR. NAGY TAMÁS

VEKTOROK ÉS MÁTRIXOK

Miskolc, 2012

„A bemutatott kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg”
„This research was carried out as part of the TAMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 project with support by the European Union, co-financed by the European Social Fund.”

TARTALOMJEGYZÉK

1. Vektorok ... 3
1.1. A vektor fogalma ... 3
1.2. Műveletek vektorokkal ... 4
1.2.1. Összeadás ... 4
1.2.2. Skalárral való szorzás ... 5
1.3. Lineáris kombináció ... 6
1.4. Skaláris szorzás ... 7
2. Mátrixok ... 9
2.1. A mátrix fogalma ... 9
2.2. Műveletek mátrixokkal ... 10
2.2.1. Összeadás ... 10
2.2.2. Skalárral való szorzás ... 10
2.2.3. Mátrixok szorzása ... 11
2.2.3. Speciális mátrixszorzások ... 14
2.2.3.1. Sorvektor és oszlopvektor szorzása (skaláris szorzás) ... 14
2.2.3.2. Oszlopvektor és sorvektor szorzása (diadikus szorzás) ... 14
2.2.3.3. Mátrix és oszlopvektor szorzása (vektorral való jobbról szorzás) ... 15
2.2.3.4. Sorvektor és mátrix szorzása (vektorral való balról szorzás) ... 17
2.2.4. A mátrixszorzás további számítási módszerei ... 22
2.2.4.1. A szorzatmátrix egy-egy elemének meghatározása (ez a definíció) ... 22
2.2.4.2. A szorzatmátrix egy-egy oszlopvektorának meghatározása ... 22
2.2.4.3. A szorzatmátrix egy-egy sorvektorának meghatározása ... 22
2.2.4.4. A szorzatmátrix meghatározása diadikus szorzatok összegeként ... 23
2.2.5. Mátrix hatványozása ... 23
2.3. Speciális mátrixok ... 24
2.3.1. Négyzetes mátrix ... 24
2.3.2. Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrix ... 25
2.3.3. Egység mátrix ... 25
2.3.4. Inverzmátrix ... 25
2.3.5. Permutáció mátrix ... 26
2.3.6. Diagonális mátrix ... 27
2.4. Műveletek speciális vektorokkal és mátrixokkal ... 27
2.4.1. Egységvektorral való szorzás ... 27
2.4.2. Összegzővektorral való szorzás ... 27
2.4.3. Egységmátrix-szal való szorzás ... 28
2.4.4. Permutáció mátrix-szal való szorzás ... 28
2.4.5. Diagonális mátrix-szal való szorzás ... 29
3. Vektor- és mátrixműveletek gyakorlása szöveges példákkal ... 30
4. Leontief-féle input-output modell ... 58
5. Feladatok ... 65

1. Vektorok

1.1. A vektor fogalma

A vektor legrövidebb megfogalmazása: a vektor egy **rendezett szám *n*-es**. Bővebben kifejtve a vektor tehát egy olyan matematikai objektum, amely n db valós számból áll és fontos a számok sorrendje is.
Például: **a**=(4, 7, 3); **b**=(45, -12, 2, -6, 78). A vektor elemeit a vektor komponenseinek, koordinátáinak nevezzük és zárójelbe tesszük. Az **a** vektor 3 elemű, más szóval 3-dimenziós, a **b** vektor pedig 5-dimenziós vektor. A vektor jelölésére a **félkövéren** írt latin kisbetűket használjuk: **a**, **b**, ..., **x**, **y**,..., stb. A vektor elemeit a vektor jelölésére használt, nem félkövéren írt *dölt* kisbetűvel jelöljük és alsóindexbe írjuk az elem sorszámát: $\mathbf{a}=(a_1, a_2,...,a_n)$. Az n-dimenziós vektorok összességét R^n-el jelöljük. Az $\mathbf{a}\in R^n$ jelöléssel jelezzük, hogy az **a** matematikai objektum n-dimenziós vektor.

A vektor elemeit vagy sorba vagy oszlopba rendezve írjuk fel. Zárójelként használhatunk kerek vagy szögletes zárójelet is. Például sorvektorként az $\mathbf{a}=(a_1, a_2,...,a_n)$ vagy az $\mathbf{a}=[a_1, a_2,...,a_n]$ vagy oszlopvektorként az

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{vagy az} \quad \mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

jelölés is használható. Nyilvánvaló, hogy a sorvektorként vagy oszlopvektorként való felírás ugyanazokat az információkat tartalmazzák, hiszen a számok és azok sorrendje megegyezik mindkét jelölésnél. A mátrixok ismertetésénél fogjuk majd megérteni a két jelölés közötti különséget. Ott majd látjuk, hogy meg is különböztetjük őket egy jelöléssel.

A vektorok között három speciális vektort ismertetünk. Mindegyik dimenzióban értelmezzük ezeket a speciális vektorokat.

Zérusvektor: $\mathbf{0}=(0, 0, 0, ..., 0)$. A zérusvektor minden eleme zérus.

Összegzővektor: $\mathbf{1}=(1, 1, 1, ..., 1)$. Az összegzővektor minden eleme 1.

Egységvektor: Az n-dimenziós vektorok között n darab egységvektor van. Az első egységvektornál az 1. elem az 1-es, a másodiknál a 2. elem az 1-es stb. és a többi elem zérus, azaz

$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0,..., 0, 0)$,
$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0,..., 0, 0)$,
....
$\mathbf{e}_n = (0, 0, 0,..., 0, 1)$.

Maga a vektor elnevezés geometriai értelmezésből származik. A szám 2-eseket és a szám 3-asokat a síkon ill. a térben irányított egyenes szakaszként ábrázolhatjuk. Ha a sík egy A pontjából a B pontjába elmozdulunk, akkor ezt egy vektorral (szám 2-essel) leírhatjuk. A vektor első eleme a vízszinte tengely irányába, a második eleme pedig a függőleges tengely irányába történő elmozdulást jelenti. A 3-dimenziós vektorok is hasonlóan értelmezhetők. A vektor szó latin eredetű és eredeti jelentései "szállító", "hordozó", "utas", pontosabban azzal kapcsolatos, hogy valakit vagy valamit egyik helyről a másikba szállítanak. A háromnál nagyobb dimenziójú vektoroknak már nem adhatunk geometriai szemléletet, de a többdimenziós esetben is gyakran használunk geometriai fogalmakat, mivel a síkbeli és a térbeli vektorok sok tulajdonsága átvihető a magasabb dimenzióba. (Pl. az ortogonalitás, más szóval merőlegesség).

Az $\mathbf{a},\mathbf{b} \in R^n$ vektorokat egyenlőnek mondjuk (jelben $\mathbf{a}=\mathbf{b}$), ha a vektoroknak az azonos sorszámú komponenseik megegyeznek, azaz $a_i = b_i$, minden i=1,2,...,n esetén.
Az $\mathbf{a},\mathbf{b} \in R^n$ vektorok között az $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ nagyságrendi reláció akkor áll fenn, ha a vektoroknak az azonos sorszámú komponenseire fennáll a ≤ reláció, azaz $a_i \leq b_i$, minden i=1,2,...,n esetén. Hasonlóan értelmezzük az $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$, $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ nagyságrendi relációkat.

1.2. Műveletek vektorokkal

Két olyan műveletet fogunk értelmezni a vektorokkal, amelyek eredménye is vektor, ezek a műveletek az **összeadás** és a **skalárral való szorzás**. Később olyan műveletet is definiálunk, amelynek eredménye nem vektor, hanem egy skalár szám lesz. Ezt a fontos műveletet **skaláris szorzás**nak nevezzük.

1.2.1. Összeadás

Csak azonos dimenziójú vektorok összeadását értelmezzük.
Legyen $\mathbf{a}=(a_1, a_2,...,a_n)$ és $\mathbf{b}=(b_1, b_2,...,b_n)$ két vektor.
Az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektor alatt az alábbi vektort értjük:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, ..., a_n+b_n).$$

Az összegvektor elemei tehát az azonos sorszámú komponensek összege.
Két vektor különbségét az összeadás alapján könnyen értelmezhetjük. Az **a** és **b** vektor különbségén azt a **c** vektort értjük, amelyre az $\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$ összefüggés áll fenn, a kölönbségvektort **a**–**b**-vel jelöljük. Az **a**–**b** vektor elemeit az azonos sorszámú komponensek megfelelő sorrendben vett különbsége adja, képletben

$$\mathbf{a}-\mathbf{b} = (a_1-b_1, a_2-b_2, ..., a_n-b_n).$$

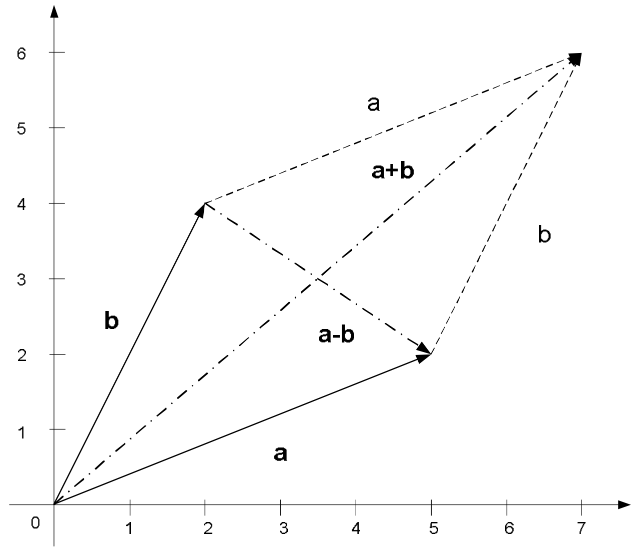
<u>**Példa**</u>:
Legyen $\mathbf{a}=(5, 2)$ és $\mathbf{b}=(2, 4)$, ekkor az összegvektor:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (5, 2) + (2, 4) = (5+2, 2+4) = (7, 6),$$

a különbségvektor:

$$\mathbf{a}-\mathbf{b} = (5, 2) - (2, 4) = (5-2, 2-4) = (3, -2).$$

A két R^2-beli vektor összeadását és kivonását geometriai úton is tudjuk szemléltetni. Az **a** és **b** vektorok által meghatározott paralelogramma egyik átlója adja az **a**+**b** összegvektort, az **a**–**b** különbségvektort pedig a másik átló adja, mégpedig úgy, hogy a különbségvektor a **b** vektor végpontjából az **a** vektor végpontjába mutat. Ezt szemlélteti az alábbi ábra.



1.2.2. Skalárral való szorzás

Legyen λ egy skalár szám. A λ**a** vektor alatt az alábbi vektort értjük:

$$\lambda\mathbf{a}=(\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ldots,\ \lambda a_n),$$

tehát skalárral úgy szorzunk egy vektort, hogy minden elemét beszorozzuk a skalárral.

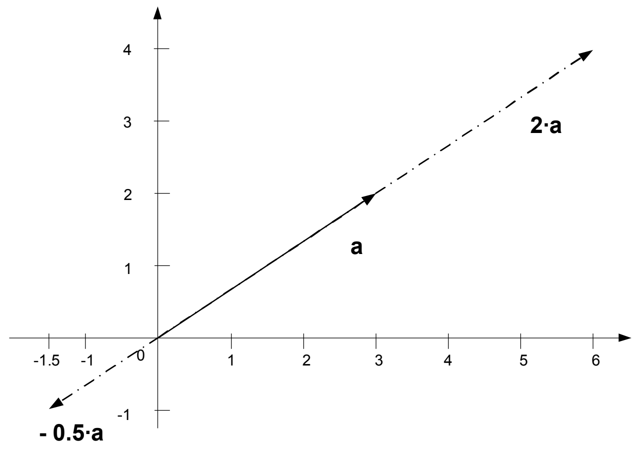
__Példa__:
Legyen **a**=(3, 2) és λ=2, akkor

$$\lambda\mathbf{a} = 2\cdot(3, 2) =(2\cdot 3,\ 2\cdot 2) = (6, 4),$$

ha λ= - 0.5, akkor

$$\lambda\mathbf{a} = -0.5\cdot(3, 2) =(-0.5\cdot 3,\ -0.5\cdot 2) = (-1.5, -1).$$

A skalárral való szorzásnak szintén adhatunk geometriai szemléletet. Az eredményvektor hatásvonala az **a** vektoréval azonos. Ha λ>0, akkor az eredményvektor iránya **a** irányával azonos, ha λ<0, akkor az eredményvektor iránya **a** irányával ellentétes. Ha $|\lambda|>1$, akkor nyújtásról, ha $0<|\lambda|<1$, akkor zsugorításról beszélünk. Ezeket mutatja az alábbi ábra.



__Példa__:
Tekintsük a következő egyszerű példát, amelynek megoldását a fenti vektorműveletekkel adhatjuk meg. Egy vállalat 4 alkatrészt gyárt. Legyen egy adott év első félévében a gyártási

volumen alkatrészenként rendre 250, 320, 180, 60; a második félévben pedig rendre 320, 440, 200, 50 darab.

a) Mennyit termelt a vállalat éves szinten az egyes termékekből?

b) A vállalat a következő év második félévében az előző év második félévi termelését mindegyik termékből 20 %-kal meg akarja növelni. Mennyi lesz a következő év második félévében a termelés termékenként?

Megoldás:

Foglaljuk a két félév termelését egy **a** és egy **b** vektorba. Az első félév termelését így az

$$\mathbf{a}=(250, 320, 180, 60),$$

a második félévét pedig a

$$\mathbf{b}=(320, 440, 200, 50)$$

vektorral írhatjuk le. A keresett mennyiségeket a megismert műveletekkel egyszerűen számíthatjuk:

a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(250+320, 320+440, 180+200, 60+50)=(570, 760, 380, 110)$,

b) $1.2\mathbf{b}=(1.2\cdot 320, 1.2\cdot 440, 1.2\cdot 200, 1.2\cdot 50)=(384, 528, 240, 60)$.

Példa:

A vektorok összeadásának és skalárral való szorzásának tulajdonságai az alábbiak:

Legyenek **a**, **b**, **c** tetszőleges n-dimenziós vektorok; λ, μ tetszőleges valós számok. Ekkor

$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$	kommutativ
$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$	asszociativ
$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$	létezik zéruselem
$\mathbf{a}+(\mathbf{-a})=\mathbf{0}$	létezik inverzelem
$(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$	skalár disztributiv
$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$	vektor disztributiv
$\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$	skalár asszociativ
$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$	létezik skalár egységelem

Megjegyezzük, hogy azokat a matematikai objektumokat, amelyekben az összeadás és a skalárral való szorzás a fenti 8 tulajdonsággal rendelkezik, lineáris térnek nevezzük. Mivel a vektorok ezeket kielégítik, ezért a vektortér elnevezést is szokás használni. Más matematikai objektumok is kielégítik ezeket a tulajdonságokat, többek között a mátrixok és egy adott intervallumban folytonos függvények is.

1.3. Lineáris kombináció

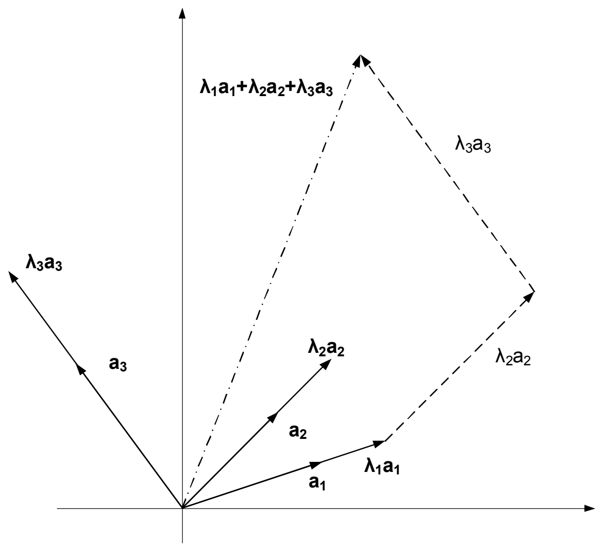
A fentebb definiált két művelet segítségével a lineáris algebra legfontosabb alapfogalmát a lineáris kombinációt az alábbiak szerint definiáljuk.

Legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ azonos dimenziójú (pl. m-dimenziós) vektorok és legyenek $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ skalárok. A

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+...+\lambda_n\mathbf{a}_n \quad \text{vagy rövidebben írva} \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathbf{a}_i$$

vektort az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ vektorok λ_1, λ_2, ..., λ_n skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

<u>Példa</u>:
Legyen $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3 \in R^2$ vektorok. Az alábbi ábra szemlélteti a három vektor lineáris kombinációját. Az eredményvektort a vektorok alkotta sokszög adja.



<u>Példa</u>:
A vállalat a következő évi termelését termékenként az első félévben 10 %-kal, a második félévben pedig (ahogy már említettük) 20 %-kal kívánja növelni. Mennyi lesz a vállalat következő évi termelése termékenként?
Vegyük észre, hogy itt az 1.1**a**+1.2**b** vektort kell kiszámítani, amely az egyes félévek termelési vektorának a növekményre vett lineáris kombinációja:

$$1.1\mathbf{a}+1.2\mathbf{b} = (275, 352, 198, 66)+ (384, 528, 240, 60)= (659, 880, 438, 126).$$

1.4. Skaláris szorzás

Csak azonos dimenziójú vektorok skaláris szorzatát értelmezzük. Két vektor skaláris szorzatán egy skalár számot kapunk, amelyet az alábbiakban definiálunk:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + ... + a_n\cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \,.$$

Az $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ skaráris szorzatot tehát úgy kapjuk, hogy az azonos indexű vektorelemeket összeszorozzuk és a szorzatokat összeadjuk.

Az **a** és **b** vektorok merőlegesek egymásra (ortogonálisak), ha a skaláris szorzatuk zérus, azaz $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. Javasoljuk az olvasónak, hogy ellenőrizze ezt az állítást két R^2-beli vektor esetében.

<u>Példa</u>:
Az előző példa 4 termékének eladási árai legyenek rendre 2, 3, 4, 5. Mennyi a vállalat első félévi árbevétele, ha a megtermelt termékeket a fenti egységáron el is adta?

Jelölje **p** vektor az egységár vektort: **p**=(2, 3, 4, 5). Ekkor az árbevételt egy skaláris szorzással határozhatjuk meg:

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{a} = 2\cdot 250 + 3\cdot 320 + 4\cdot 180 + 5\cdot 60 = 2480.$$

A vektorok skaláris szorzásának tulajdonságai:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \qquad \text{kommutativ}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \qquad \text{disztributiv}$$

$$(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \qquad \text{skalár asszociativ}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\geq\mathbf{0} \qquad = \text{(egyenlő) akkor és csak akkor, ha } \mathbf{a}=\mathbf{0}$$

2. Mátrixok

2.1. A mátrix fogalma

A mátrix legrövidebb megfogalmazása: a mátrix **egy szám *m*×*n*-es**. Bővebben kifejtve a mátrix egy olyan matematikai objektum, melyben a valós számok m számú sorban és n számú oszlopban vannak elrendezve.
A mátrix a latin matricula szóból származik, amely anyakönyvet jelent. Az elnevezés arra utal, hogy az anyakönyvbeli adatokhoz hasonlóan a mátrixnál is a számok sorokban és oszlopokban vannak elrendezve.

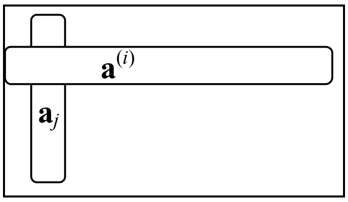
A mátrix jelölésére a **félkövéren** írt latin nagybetűket használjuk: **A**, **B**, ..., stb. A mátrix elemeit a vektor jelölésére használt, nem félkövéren írt *dölt* kisbetűvel jelöljük és alsóindexbe írjuk az elem helyét meghatározó sor- és oszlopszámot. Az a_{ij} elem az **A** mátrix i-edik sorának j-edik elemét jelenti. Tehát az **első** helyen álló index a **sorindex**, a **második** az **oszlopindex**. Az $\mathbf{A} \in R^{m\times n}$ jelöléssel jelezzük, hogy az **A** matematikai objektum $m\times n$ méretű mátrix. Szokásos szóhasználat a méretre, hogy az **A** mátrix rendje $m\times n$.
A könnyebb tájékozódás miatt célszerű az alábbiakban a következő megállapodással élni: A mátrix sorainak számát m, az oszlopainak számát n, az elem sorindexét i, az oszlopindexét pedig j jelöli. Ettől természetesen eltérhetünk.
Egy m sorból és n oszlopból álló **A** mátrix elemeit kerek vagy szögletes zárójelbe szoktuk írni az alábbi módon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A mátrixot - főleg a műveletek elvégzésének megkönnyítése érdekében - az alábbi sémával szoktuk ábrázolni, vagyis egy téglalapba írjuk az elemeket, de ekkor nem írjuk eléje az **A**= jelet, legfeljebb egy nyíllal jelöljük, hogy melyik mátrix sémájáról van szó.

$$\boxed{\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ : & : & & : & & : \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ : & : & & : & & : \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{array}} \leftarrow \mathbf{A}$$

A mátrix felfogható úgy is, mint m darab egymás alá írt n-dimenziós vektor összessége, de úgy is felfogható, mint n darab egymás mellé írt m-dimenziós vektor összessége. A sorba írt vektorokat a mátrix **sorvektorainak**, az oszlopba írt vektorokat pedig a mátrix **oszlopvektorainak** nevezzük. Az i-edik sorvektort $\mathbf{a}^{(i)}$, a j-edik oszlopvektort pedig $\mathbf{a}_j$ szimbólummal jelöljük, ezt mutatja az alábbi séma:



Tehát az **A** mátrixot felírhatjuk az alábbi két módon is:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(m)} \end{bmatrix} \qquad \text{vagy} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

Sémával történő ábrázolás esetén:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ : \\ : \\ \mathbf{a}^{(m)} \end{array}} \qquad \text{vagy} \qquad \boxed{\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_2 \;\; \dots \;\; \mathbf{a}_n}$$

Egy **A** mátrix sorainak és oszlopainak felcserélésével kapott mátrixot az **A** mátrix transzponáltjának nevezünk és $\mathbf{A}^T$-vel jelöljük.

A sorok és oszlopok számára nincs megkötés, csak véges természetes számok legyenek.
Ha m=1, azaz a mátrix egyetlen sorból áll, akkor a mátrixot sorvektornak tekinthetjük.
Ha n=1, azaz a mátrix egyetlen oszlopból áll, akkor a mátrixot oszlopvektornak tekinthetjük. Itt tapasztalhatjuk a sorvektor és az oszlopvektor megkülönböztetést.

2.2. Műveletek mátrixokkal

A vektorokra megismert összeadás és skalárral való szorzás hasonló a mátrixok esetében is. Ahogy a vektoroknál már láttuk, a mátrixok esetében is nagyon fontos jelentősége van a műveletben szereplő objektumok méretének.

2.2.1. Összeadás

Csak akkor értelmezzük, ha a két mátrix azonos rendű (méretű), azaz sor- és oszlopméretük azonos. Az **A**+**B** mátrix számításánál a megfelelő indexű elemeket össze kell adni.

2.2.2. Skalárral való szorzás

A $\lambda\mathbf{A}$ mátrix számításánál a mátrix minden egyes elemét meg kell szorozni λ-val.

Könnyű belátni, hogy a mátrixokra vonatkozó összeadás és a skalárral való szorzás művelet kielégíti a vektoroknál ismertetett 8 tulajdonságot, így az azonos rendű (méretű) mátrixok is lineáris teret (vektorteret) alkotnak.

2.2.3. Mátrixok szorzása

Az **A** mátrix és a **B** mátrix **A·B** szorzatmátrixán azt a **C** mátrixot értjük, amely *i*-edik sorának *j*-edik elemét az alábbi módon számítjuk ki:

$$c_{ij} = \mathbf{a}^{(i)} \cdot \mathbf{b}_j$$

azaz az **A** mátrix *i*-edik **sorvektorát** ($\mathbf{a}^{(i)}$ vektort) skalárisan megszorozzuk a **B** mátrix *j*-edik **oszlopvektorával** ($\mathbf{b}_j$ vektorral), akkor az eredménymátrix *i*-edik sorának *j*-edik elemét kapjuk.
A mátrixszorzás csak akkor végezhető el, ha a definícióban szereplő skaláris szorzás elvégezhető, ez pedig azt követeli meg, hogy a mátrixszorzás (**A·B**) műveletében az első helyen szereplő **A** mátrix **oszlopainak a száma** megegyezzen a második helyen szereplő **B** mátrix **sorainak számával**. Ezt az egyezőséget úgy szokták mondani, hogy az **A** és **B** mátrixok **konformábilisak**. Az eredménymátrix sormérete az **A** mátrix sorméretével, az oszlopmérete pedig a **B** mátrix oszlopméretével egyezik meg.

A mátrixszorzás tulajdonságai:

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &\neq \mathbf{BA} && \text{nem kommutativ} \\
(\mathbf{AB})\mathbf{C} &= \mathbf{A}(\mathbf{BC}) && \text{asszociativ} \\
\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{AB}+\mathbf{AC} && \text{disztributiv} \\
(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} &= \mathbf{BA}+\mathbf{CA} && \text{disztributiv} \\
(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} &= \lambda(\mathbf{AB}) && \text{skalár asszociativ} \\
\mathbf{AE} &= \mathbf{EA} = \mathbf{E}
\end{aligned}$$

A mátrixszorzás azért sem lehet általában kommutatív, mert a méretek nem megfelelőek, pl. $\mathbf{A}\in R^{3\times 4}$, $\mathbf{B}\in R^{5\times 2}$. Ha esetleg el is végezhető a **BA** fordított sorrendbeli szorzás (pl. $\mathbf{A}\in R^{3\times 4}$, $\mathbf{B}\in R^{4\times 3}$), akkor nem biztos, hogy az eredménymátrix ($\mathbf{AB}\in R^{3\times 3}$) azonos rendű az **BA** mátrix-szal ($\mathbf{BA}\in R^{4\times 4}$). Két $n\times n$-es mátrix (pl. $\mathbf{A},\mathbf{B}\in R^{3\times 3}$) esetén nincs probléma sem az elvégezhetőséggel sem a méretekkel, de a két mátrix elemei általában nem azonosak.
A mátrixszorzás asszociativitása lehetővé teszi a tetszőleges zárójelezhetőséget.
Megjegyezzük, hogy másféle mátrixszorzás is elképzelhető, például a Hadamard szorzás, amelynél $c_{ij} = a_{ij}\cdot b_{ij}$. Hasonlóan az összeadáshoz, ekkor a két mátrixnak azonos méretűnek kell lenni és a kommutativitás is érvényes.

<u>**Példa**</u>:
Legyen adott két mátrix, az $\mathbf{A}\in R^{3\times 4}$ és a $\mathbf{B}\in R^{4\times 2}$ mátrixok. Határozzuk meg a $\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ szorzatmátrixot!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A művelet elvégezhető, mivel az **A** mátrix **oszlopmérete** megegyezik a **B** mátrix **sorméretével**, azaz a két mátrix konformábilis, amit az alábbiak szerint szemléltetünk:

$$(3\times \underbrace{4)(4}_{=}\times 2) \xrightarrow{\text{eredmény}} (3\times 2)$$

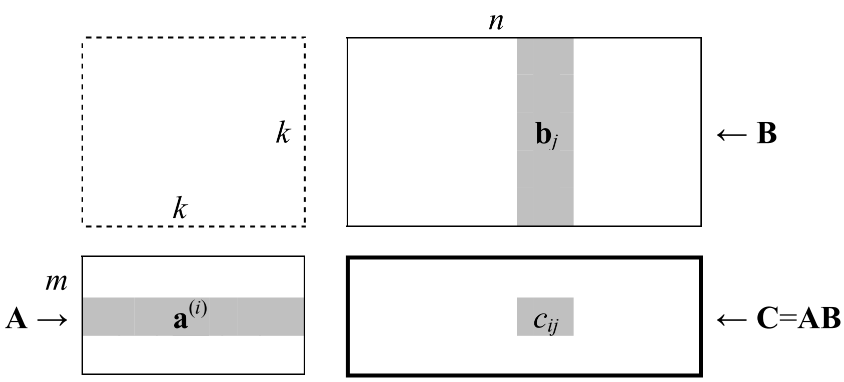
Számítsuk ki az eredménymátrix c_{21} elemét: az **A** mátrix **második** sorában lévő **sorvektort** kell megszorozni **skalárisan** a **B** mátrix **első** oszlopában lévő **oszlopvektorral**. Ezt az alábbiakban szemléltetjük. Az egyszerűség miatt csak a c_{21} elem számításához szükséges számokat tüntettük fel, félkövéren szedve. A skaláris szorzás eredménye, azaz c_{21} = 3·1 + 1·3 + (-1)·4 +2·1 = 3 + 3 -4 + 2 = 4.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1} & . \\ \mathbf{3} & . \\ \mathbf{4} & . \\ \mathbf{1} & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . \\ \mathbf{4} & . \\ . & . \end{bmatrix}$$

Az eredménymátrix többi elemét is hasonló módon számítjuk ki, amelyet az olvasó is ellenőrizhet.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 12 \\ 4 & 5 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Képzeljük el, hogy nagyobb méretűek a mátrixok, ekkor a skaláris szorzásban szereplő elemek „összepárosítása” nem olyan egyszerű. Célszerű ezért a mátrixszorzást az alábbi sémában felrajzolni és ekkor világosan látszanak a méretviszonyok és a művelet is sokkal szemléletesebben végezhető el. Legyen az **A** mátrix $m \times k$ méretű, a **B** mátrix $k \times n$ méretű. Készítsünk a művelet elvégzéséhez olyan sémát, amelyben a **B** mátrix sémáját ne az **A** mátrix sémája mellé, hanem felcsúsztatva írjuk fel. Szemléletesen látszik, hogy a mátrixszorzás művelete csak akkor végezhető el, ha az **A** mátrix felett és a **B** mátrix melletti terület négyzet ($k \times k$) alakú. Az **A** mátrix mellett és a **B** mátrix alatti terület pontosan a **C** szorzatmátrix helyét ($m \times n$) jelöli ki. Ezt a sémát, amelyet Falk-sémának nevezünk, az alábbi ábra mutatja.



Az **A** mátrix i-edik sorvektorát ($\mathbf{a}^{(i)}$) így könnyebben össze lehet szorozni skalárisan a **B** mátrix j-edik oszlopvektorával ($\mathbf{b}_j$), a skaláris szorzás eredményét (c_{ij}) pedig az i-edik sor és a j-edik oszlop metszéspontjába kell írni.

Végezzük el a fenti példában szereplő mátrixszorzást a Falk-séma segítségével. Az alábbi ábrában c_{11} elem számítását szemléltettük.

	•	←	←	←	←	←	←	←	**1**	2	
	↑	+									
	↑		•	←	←	←	←	←	**3**	2	
	↑		↑	+							← **B**
	↑		↑		•	←	←	←	**4**	1	
	↑		↑		↑	+					
	↑		↑		↑		•	←	**1**	-1	
	↑		↑		↑		↑	+			
	2		**2**		**4**		**0**		**24**	12	
A →	3		1		-1		2		4	5	← **C**=**AB**
	0		2		1		-1		9	6	

A számítás menete a következő: $c_{11} = 2\cdot1 + 2\cdot3 + 4\cdot4 + 0\cdot1 = 2 + 6 + 16 + 0 = 24$.

Példa:
Az előző példában szereplő $\mathbf{A}\in R^{3\times4}$ és $\mathbf{B}\in R^{4\times2}$ mátrixokkal végezzük el a **BA** szorzást!

Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a művelet nem végezhető el, mert a két mátrix nem konformábilis, ugyanis $(4\times\underbrace{2)(3}_{\neq}\times4)$. Elvégezhető viszont a $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ szorzás, hiszen

$$(2\times\underbrace{4)(4}_{=}\times3)\xrightarrow{\text{eredmény}}(2\times3).$$

A szorzás eredménye:

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}1&3&4&1\\2&2&1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&3&0\\2&1&2\\4&-1&1\\0&2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24&4&9\\12&5&6\end{bmatrix}.$$

Amennyiben könnyebbnek érzi az olvasó a Falk-sémával való számítást, javasoljuk, hogy végezze el a műveletet annak segítségével is.

Ne lepődjünk meg a művelet eredményén, igaz ugyanis a következő:

$$(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T,$$

azaz egy szorzatmátrix transzponáltja megegyezik a tényező mátrixok transzponáltjainak szorzatával, de fordított sorrendben.

2.2.3. Speciális mátrixszorzások

Ebben a pontban külön tárgyaljuk a fontosságuk miatt azokat az eseteket, amikor a szorzásban szereplő mátrixok egyetlen sorral és/vagy egyetlen oszloppal rendelkeznek.

2.2.3.1. Sorvektor és oszlopvektor szorzása (skaláris szorzás)

Legyen az **AB** mátrixszorzásban az **első helyen** lévő mátrix olyan, amelynek **egyetlen sora** van. Mint említettük ezt sorvektornak tekinthetjük. Legyen továbbá a **második helyen** lévő mátrix olyan, amelynek **egyetlen oszlopa** van. Ezt pedig oszlopvektornak tekinthetjük. Ebben a szorzásban egy sorvektort és egy oszlopvektort kell skalárisan összeszorozni a megfelelő sorrendben. A művelet akkor végezhető el, ha a két vektor azonos méretű, azaz

$$(1\times \underbrace{n)(n}_{=}\times 1)\xrightarrow{\text{eredmény}}(1\times 1)$$

Az eredmény egy 1×1-es mátrix, amely valójában egyetlen szám. Ha jobban megfigyeljük, akkor azt tapasztaljuk, hogy ez a szorzás a vektorok körében megismert skaláris szorzásnak felel meg. A vektorok tárgyalásánál nem tettünk kölönbséget a sorvektor és az oszlopvektor között. Itt azonban különbséget kell tennünk. Általában egy vektoron mindig oszlopvektort értünk, ha úgy tetszik egyetlen oszlopból álló mátrixot értünk. A sorvektort pedig egyetlen sorból álló mátrixnak tekintjük. A sorvektort tehát az oszlopvektor transzponáltjaként tekintjük. Az **a** oszlopvektornak megfelelő sorvektort így $\mathbf{a}^T$ jelöléssel illetjük. Eszerint két vektor skaláris szorzatát mátrixszorzatos felírásban az $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ módon jelöljük. A jelölésekre később visszatérünk.

<u>Példa</u>:
Legyenek adottak az $\mathbf{a}, \mathbf{b}\in R^3$ vektorok. Számítsuk ki az **ab** vagy mátrixszorzatos jelöléssel az $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ skaláris szorzatot!

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}5\\1\\2\end{bmatrix}.$$

A művelet elvégezhető, mivel a két vektor azonos méretű. Az eredmény:

$$\mathbf{ab}=\mathbf{a}^T\mathbf{b}=\begin{bmatrix}3, & 2, & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\1\\2\end{bmatrix}=3\cdot 5+2\cdot 1+4\cdot 2=25.$$

A művelet áttekinthetőbben is elvégezhető, ha mindegyik vektort oszlopként ábrázoljuk, mert így az azonos sorszámú elemeket könnyebben megtaláljuk.

2.2.3.2. Oszlopvektor és sorvektor szorzása (diadikus szorzás)

Legyen az **AB** mátrixszorzásban az **első helyen** lévő mátrix olyan, amelynek **egyetlen oszlopa** van. Legyen továbbá a **második helyen** lévő mátrix olyan, amelynek **egyetlen sora** van. Ebben a szorzásban egy oszlopvektort és egy sorvektort kell összeszorozni a megfelelő sorrendben. A művelet elvégezhetőségének nincs méretbeli korlátja. Az m dimenziós oszlopvektor és az n-dimenziós sorvektor szorzata egy $m\times n$ méretű mátrix lesz, azaz

$$(m\times \underbrace{1)(1}_{=}\times n)\xrightarrow{\text{eredmény}}(m\times n)$$

A művelet jelölése pedig $\mathbf{ab}^T$. Az eredménymátrix elemei: $c_{ij} = a_i\, b_j$. A vektoroknak ezt a fajta szorzását diadikus szorzásnak nevezzük. Sok szerző nem használja transzponálás jelét, ők a diadikus szorzásra külön jelet használnak, nevezeten az $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}$ jelölést. A jelölésekre később visszatérünk.

<u>Példa</u>:
Legyenek adottak az $\mathbf{a}\in R^3$, $\mathbf{b}\in R^4$ vektorok. Számítsuk ki az $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}$ vagy mátrixszorzatos jelöléssel az $\mathbf{ab}^T$ diadikus szorzatot!

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\4\end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{ab}^T$ művelet a vektorok méretétől függetlenül minden esetben elvégezhető, az eredmény egy mátrix, amely 3×4 méretű. Az eredmény:

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b}=\mathbf{ab}^T=\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -4 & 12 & 16\\6 & -3 & 9 & 12\\4 & -2 & 6 & 8\end{bmatrix}.$$

Úgy gondoljuk, hogy ezt a műveletet célszerűbb a Falk-séma segítségével elvégezni. Így könnyebben ellenőrizhető az is, hogyan számíthatók az eredménymátrix sorvektorai, ill. oszlopvektorai.

		2	-1	3	4	$\leftarrow \mathbf{b}$
	4	8	-4	12	16	
$\mathbf{a}\rightarrow$	3	6	-3	9	12	$\leftarrow \mathbf{ab}^T$
	2	4	-2	6	8	

Az $\mathbf{ab}^T$ diadikus szorzat elemenkénti számítása helyett célszerű soronként vagy oszloponként számolni. Könnyen ellenőrizhető, hogy az eredménymátrix i-edik **sorvektora** a $\mathbf{b}$ vektor a_i számmal való szorzásaként, j-edik **oszlopvektora** pedig az $\mathbf{a}$ vektor b_j számmal való szorzásaként adódnak.

2.2.3.3. Mátrix és oszlopvektor szorzása (vektorral való jobbról szorzás)

Legyen az **AB** mátrixszorzásban a **második helyen** lévő mátrix olyan, amelynek **egyetlen oszlopa** van. Jelölje az oszlopvektort az **x** vektor.

A mátrixok szorzásának definíciójából következik, hogy az **Ax** művelet csak akkor értelmezett, ha az **A** mátrix oszlopmérete és az **x** vektor mérete megegyezik, az eredményvektor mérete pedig az **A** mátrix sorméretével azonos. Legyen $\mathbf{A}\in R^{m\times n}$, ekkor szükségszerűen $\mathbf{x}\in R^n$, azaz

$$(m\times \underbrace{n)(n}_{=}\times 1)\xrightarrow{\text{eredmény}}(m\times 1)$$

A mátrixszorzás definíciójából adódik, hogy az **Ax** művelet eredménye olyan vektor, amelynek elemeit az **A** mátrix egyes **sorvektorainak** és az **x** vektornak a skaláris szorzataként nyerjük, azaz

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{x} \\ \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(m)}\mathbf{x} \end{bmatrix}.$$

Vizsgáljuk meg részletesebben az **Ax** szorzás eredményeként adódó vektort, a következőt tapasztaljuk.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{x} \\ \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(m)}\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} x_j$$

Az utolsó képletben szereplő szummában az **A** mátrix j-edik **oszlopvektora** szerepel, ebből pedig azt olvashatjuk ki, hogy az **Ax** vektor nem más, mint az **A** mátrix **oszlopvektorainak** az **x** vektor elemeire vett lineáris kombinációja, azaz

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n .$$

A mátrix és a vektor szorzásának a lineáris kombinációval való meghatározását nagyon sokszor használjuk a gyakorlatban.

Összefoglalva tehát egy mátrixnak egy vektorral való **jobbról** szorzásaként (**Ax**) olyan vektort kapunk, amely az alábbi két módon is számítható:

- az eredményvektor a mátrix oszlopvektorainak a vektor elemeire vett lineáris kombinációja,
- az eredményvektor elemei a mátrix sorvektorainak és a vektornak a skaláris szorzata.

Példa:

Legyen adott az $\mathbf{A}\in R^{3\times 4}$ mátrix és az $\mathbf{x}\in R^4$ vektor. Számítsuk ki az **Ax** vektort!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Az **Ax** művelet elvégezhető a méretek miatt, az eredményvektor 3 dimenziós lesz.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -1 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

A fenti művelet Falk-sémával egyszerűbben elvégezhető, így is elvégezzük a műveletet.

$$
\begin{array}{rcc}
 & & \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \\ \hline\end{array} \leftarrow \mathbf{x} \\
\mathbf{A} \rightarrow & \begin{array}{|cccc|}\hline 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 27 \\ -1 \\ 12 \\ \hline\end{array} \leftarrow \mathbf{Ax}
\end{array}
$$

Mátrix-vektor szorzási művelet elvégzésénél a Falk-sémától eltérő sémával is dolgozhatunk. Ekkor a vektort a mátrix fölé rajzoljuk fel az alábbi módon.

$$
\begin{array}{rcc}
\mathbf{x} \rightarrow & \begin{array}{|cccc|}\hline 2 & -1 & 3 & 4 \\ \hline\end{array} & \\
\mathbf{A} \rightarrow & \begin{array}{|cccc|}\hline 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ \hline\end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 27 \\ -1 \\ 12 \\ \hline\end{array} \leftarrow \mathbf{Ax}
\end{array}
$$

Ebben a sémában még szemléletesebb a műveletvégzés.
Az elemenkénti számolásnál a mátrix **sorvektorait** kell a felette lévő vektorral skalárisan szorozni, így az összeszorzandó tényezők könnyebben megtalálhatók.
A lineáris kombinációval történő számolás is szemléletesebb, mert az **oszlopvektorok** lineáris kombinációját kell venni és a lineáris kombinációban szereplő számok az oszlopvektor fölött vannak.

$$\mathbf{Ax} = 2\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-5\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}16\\-4\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}27\\-1\\12\end{pmatrix}.$$

2.2.3.4. Sorvektor és mátrix szorzása (vektorral való balról szorzás)

Legyen az **AB** mátrixszorzásban az **első helyen** lévő mátrix olyan, amelynek **egyetlen sora** van. Jelölje a sorvektort az **y** vektor.
A mátrixok szorzásának definíciójából következik, hogy az **yA** művelet csak akkor értelmezett, ha az **A** mátrix sormérete és az **y** vektor mérete megegyezik, az eredményvektor mérete pedig az **A** mátrix oszlopméretével azonos. Legyen $\mathbf{A}\in R^{m\times n}$, ekkor szükségszerűen $\mathbf{y}\in R^{m}$, azaz

$$(1\times \underbrace{m)(m}_{=}\times n)\xrightarrow{\text{eredmény}}(1\times n)$$

A mátrixszorzás definíciójából adódik, hogy az **yA** művelet eredménye olyan vektor, amelynek elemeit az **A** mátrix egyes **oszlopvektorainak** és az **y** vektornak a skaláris szorzataként nyerjük, azaz

$$\mathbf{yA} = [\mathbf{ya}_1 \quad \mathbf{ya}_2 \quad \dots \quad \mathbf{ya}_n].$$

Vizsgáljuk meg részletesebben az **yA** szorzás eredményeként adódó vektort, a következőt tapasztaljuk.

$$\mathbf{yA} = \left[\sum_{i=1}^{m} y_i a_{i1} \quad \sum_{i=1}^{m} y_i a_{i2} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^{m} y_i a_{in} \right] = \sum_{i=1}^{m} y_i [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}].$$

Az utolsó képletben szereplő szummában az **A** mátrix *i*-edik sorvektora szerepel, ebből pedig azt olvashatjuk ki, hogy az **yA** vektor nem más, mint az **A** mátrix sorvektorainak az **y** vektor elemeire vett lineáris kombinációja, azaz

$$\mathbf{yA} = y_1 \mathbf{a}^{(1)} + y_2 \mathbf{a}^{(2)} + \dots + y_m \mathbf{a}^{(m)}.$$

A vektor és a mátrix szorzásának a lineáris kombinációval való meghatározását szintén nagyon sokszor használjuk gyakorlatban.

Összefoglalva tehát egy mátrixnak egy vektorral való **balról** szorzásaként (**yA**) olyan vektort kapunk, amely az alábbi két módon is számítható:

- az eredményvektor a mátrix sorvektorainak a vektor elemeire vett lineáris kombinációja,
- az eredményvektor elemei a mátrix oszlopvektorainak és a vektornak a skaláris szorzata.

Példa:

Legyenek adott az $\mathbf{A} \in R^{3\times 4}$ mátrix és az $\mathbf{y} \in R^3$ vektor. Számítsuk ki az **yA** vektort!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az **yA** művelet elvégezhető a méretek miatt, az eredményvektor 3 dimenziós lesz.

$$\mathbf{yA} = [4 \quad -2 \quad 1] \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} = [12 \quad -2 \quad 4 \quad 21].$$

A fenti művelet Falk-sémával egyszerűbben elvégezhető, így is elvégezzük a műveletet.

				3	1	2	4	
				1	5	2	-1	← **A**
				2	4	0	3	
y →	4	-2	1	12	-2	4	21	← **yA**

Vektor-mátrix szorzási művelet elvégzésénél a Falk-sémától eltérő sémával is dolgozhatunk. Ekkor a vektort a mátrix bal oldalára rajzoljuk fel az alábbi módon.

$$\mathbf{y} \rightarrow \begin{array}{|c|}\hline 4 \\ -2 \\ 1 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|cccc|}\hline 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ \hline\end{array} \leftarrow \mathbf{A}$$

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 12 & -2 & 4 & 21 \\ \hline\end{array} \leftarrow \mathbf{yA}$$

$$\mathbf{yA} = 4\cdot(3 \quad 1 \quad 2 \quad 4) + (-2)\cdot(1 \quad 5 \quad 2 \quad -1) + 1\cdot(3 \quad 4 \quad 0 \quad 3) =$$
$$= (16 \quad 4 \quad 8 \quad 16) + (-2 \quad -10 \quad -4 \quad 2) + (2 \quad 4 \quad 0 \quad 3) = (12 \quad -2 \quad 4 \quad 21)$$

A műveletvégzés itt is szemléletesebb.
Az elemenkénti számolásnál a mátrix **oszlopvektorait** kell a mellette lévő vektorral skalárisan szorozni, így az összeszorzandó tényezők könnyebben megtalálhatók.
A lineáris kombinációval történő számolás is szemléletesebb, mert a **sorvektorok** lineáris kombinációját kell venni és a lineáris kombinációban szereplő számok a sorvektor elött vannak.

Megjegyzés:
A mátrix-vektor ill. a vektor-mátrix szorzás, mint említettük, sokszor előfordul a gyakorlatban, ezért közöljük a műveletek főbb tulajdonságait:

$$\begin{array}{rcl|rcl} \mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) & = & \mathbf{Ax}+\mathbf{Ay} & (\mathbf{y}+\mathbf{z})\mathbf{A} & = & \mathbf{yA}+\mathbf{zA} \\ \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) & = & \lambda(\mathbf{Ax}) & (\lambda\mathbf{y})\mathbf{A} & = & \lambda(\mathbf{yA}) \end{array}$$
$$\mathbf{y}(\mathbf{Ax}) = (\mathbf{yA})\mathbf{x}$$

Ezek a tulajdonságok egyszerűen kiolvashatók a mátrixszorzás tulajdonságaiból. Az utolsó tulajdonság miatt a zárójelezés el is hagyható, az eredmény egy skalár szám, ami írható egyszerűen az **yAx** alakban is.

Példa:
Legyen adott az előző két példa mátrixa és két vektora. Számítsuk ki az **yAx** számértéket!

Célszerű a számításhoz az alábbi sémát használni, amely a művelet elvégezhetőségét is szemléletesen mutatja.

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 2 & -1 & 3 & 4 \\ \hline\end{array} \leftarrow \mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} \rightarrow \begin{array}{|c|}\hline 4 \\ -2 \\ 1 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|cccc|}\hline 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ \hline\end{array} \leftarrow \mathbf{A}$$

A számítást úgy végezzük, hogy végigmegyünk a mátrix elemein és az elemeket megszorozzuk a sorban, illetve az oszlopban lévő vektorelemekkel, azaz

$$\mathbf{yAx} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j \,.$$

A számítás eredménye: **yAx** = 4·3·2 + 4·1·(-1) +…+ 1·3·4 = 122.
Javasoljuk az olvasónak a művelet elvégzését az (**yA**)**x** és az **y**(**Ax**), azaz két vektor skaláris szorzatának alakjában is.

Megállapodás:
A sorvektor és az oszlopvektor szorzását bemutató részben írtunk először a sorvektor és az oszlopvektor megkülönböztetéséről. A sorvektort transzponálással jelöltük. Két vektor skaláris szorzatára bevezettük az $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ mátrixszorzatos jelölést, ennek ellenére használtuk az **ab** jelölést is. Az oszlopvektor és a sorvektor szorzását bemutató részben, a diadikus szorzásnál az $\mathbf{ab}^T$ mátrixszorzatos jelölést használtuk, ennek ellenére az $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}$ jelölést is használtuk. Sőt a sorvektor és mátrix szorzását bemutató részben szó volt sorvektorról (**y**), de nem használtuk a transzponálás jelét.

Olyan szorzási műveletekben, ahol csak két vektor, ill. csak egy vektor és egy mátrix szerepel, elhagyható a transzponálás jele, de ezt a megállapodást illik közölni. Ezek a műveletek fordulnak elő ugyanis a leggyakrabban különböző gyakorlati problémák tárgyalásában. Mi is közöljük a jelölésbeli megállapodást, tehát:

- két vektor **skaláris szorzását** az **ab** vektorszorzatos szimbólummal jelöljük az $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ mátrixszorzatos felírás helyett,
- egy mátrix és egy vektor szorzásánál
  - a mátrixnak a vektorral **balról** való szorzását az **yA** vektorszorzatos szimbólummal jelöljük az $\mathbf{y}^T\mathbf{A}$ mátrixszorzatos felírás helyett,
  - a mátrixnak a vektorral **jobbról** való szorzását az **Ax** vektorszorzatos szimbólummmal jelöljük, ami azonos **Ax** mátrixszorzatos felírással,
- az **yAx** vektorszorzatos jelölést használjuk az $\mathbf{y}^T(\mathbf{Ax})$ és az azonos eredményt adó $(\mathbf{yA})^T\mathbf{x}$ mátrixszorzatos felírás helyett.

A alábbiakban megpróbálom megvilágítani a vektorszorzatos jelölésmód problematikáját.
Az **Ax** vektor és az **y** vektor skaláris szorzását kétféleképpen is írhatjuk:
- vektorszorzatos írásmód: $(\mathbf{Ax})\mathbf{y}$ vagy $\mathbf{y}(\mathbf{Ax})$, a kommutativitás miatt,
- mátrixszorzatos írásmód: $(\mathbf{Ax})^T\mathbf{y}$ vagy $\mathbf{y}^T(\mathbf{Ax})$, szintén a kommutativitás miatt.
A $(\mathbf{Ax})\mathbf{y}$ típusú vektorszorzatos írásmódnál vigyázni kell az asszociativitás használatára, itt a zárójelezés nem használható. Nem írható, hogy $\mathbf{A}(\mathbf{xy})$. Az $(\mathbf{Ax})^T\mathbf{y}$ mátrixszorzatos írásmódnál fel sem merülhet a másfajta zárójelezés. Írható azonban, hogy $(\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T)\mathbf{y}$. Itt már zárójelezhetünk.

Tehát bonyolultabb mátrix-vektoros műveleteknél nem lehet eltérni a mátrixszorzatos jelöléstől. Mi sem térünk el ettől.

Miért használjuk mégis a vektorszorzatos írásmódot néhány speciális esetben? Ezek a speciális esetek a következők: két vektor skaláris szorzata (**xy**), mátrix és vektor jobbról ill. balról szorzása (**Ax**, **yA**), mátrix és vektor szorzása balról és jobbról (**yAx**). Ennek egyik okáról (gyakori előfordulás) már írtunk, a másik ok a következő:
A tapasztalat szerint nagyon sok (főleg közgazdaságtani) könyvben megtalálható a fent leírt jelölésmód. Kevesebben használják viszont két vektor diadikus szorzásánál az $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}$ szimbólumot az $\mathbf{ab}^T$ mátrixszorzatos felírás helyett. Ezt mi sem használjuk, a diadikus szorzásnál megmaradunk a mátrixszorzatos írásmód mellett.
Mivel e segédletet főleg közgazdász hallgatók használják, ezért tartottam célszerűnek az eltérést a mátrixszorzatos írásmódtól, helyette a vektorszorzatos formát használom.

Még néhány szót szólnunk kell arról, hogy a mátrixok sorvektorainak jelölésére miért nem használjuk a transzponálás jelét. Az *i*-edik sorvektor jelölésére mi az $\mathbf{a}^{(i)}$ szimbólumot használjuk. Ha az $\mathbf{a}_i^T$ jelölést használnánk, akkor ez nem lenne egyértelmű, hiszen gondolhatnánk az $\mathbf{a}_i$ oszlopvektor transzponáltjára is, ezért szokásos az $\mathbf{a}^{iT}$ jelölés. A megállapodásunkat tehát kiegészítjük azzal, hogy a mátrix sorvektorait az $\mathbf{a}^{(i)}$ szimbólummal jelöljük, itt sem használjuk a transzponálást, a kihangsúlyozás miatt használjuk a felső indexben a zárójelet.

A mátrixműveletek gyakorlására oldjuk meg az alábbi példát. A példa arra is szolgál, hogy bonyolult képlettel leírt műveletnél mindenképpen a mátrixszorzatos felírást kell használni.

<u>Példa</u>:
Legyen adott az $\mathbf{A}\in R^{3\times 2}$ és a $\mathbf{B}\in R^{4\times 2}$ mátrix, valamint az $\mathbf{a}\in R^3$ és $\mathbf{b}\in R^4$ vektor. Határozzuk meg az $\mathbf{AA}^T\mathbf{ab}^T\mathbf{B}$ művelet eredményét!

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{a}=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 3\\ 1\end{bmatrix}.$$

A művelet elvégezhető, mert a szükséges csatlakozások érvényesek, ugyanis

$$(3\times \underbrace{2)(2}_{=}\times \underbrace{3)(3}_{=}\times \underbrace{1)(1}_{=}\times \underbrace{4)(4}_{=}\times 2)\xrightarrow{\text{eredmény}}(3\times 2)\,.$$

Mivel a mátrixszorzás művelete asszociatív, így bárhogyan zárójelezhető a kiszámítandó kifejezés. A művelet eredménye az alábbi. A számítást lépésekben, balról jobbra haladással végeztük. Először az $\mathbf{AA}^T$, majd az $(\mathbf{AA}^T)\mathbf{a}$, stb. műveleteket végeztük el.

$$\mathbf{AA}^T\mathbf{ab}^T\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}108 & 144\\ 144 & 192\\ 72 & 96\end{bmatrix}.$$

A műveletvégzést Falk-sémával sokkal egyszerűbb elvégezni, kisebb a tévesztési lehetőség és sokkal kevesebbet kell írni.

												1	3
						2						0	1
			1	1	2	0						2	1
			2	3	0	1		2	1	3	1	1	2
1	2		5	7	2	12		24	12	36	12	108	144
1	3		7	10	2	16		32	16	48	16	144	192
2	0		2	2	4	8		16	8	24	8	72	96

A séma jobb alsó sarkából olvasható ki az $\mathbf{AA}^T\mathbf{ab}^T\mathbf{B}$ művelet eredményét adó mátrix. Javasoljuk az olvasónak, hogy végezze el az $(\mathbf{AA}^T)(\mathbf{ab}^T)\mathbf{B}$ és az $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{a})(\mathbf{b}^T\mathbf{B})$ formában is a műveletet.

2.2.4. A mátrixszorzás további számítási módszerei

Legyenek adottak az $\mathbf{A} \in R^{m\times k}$ és a $\mathbf{B} \in R^{k\times n}$ mátrixok.
Legyenek az **A** mátrix oszlopvektorai $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \cdots,\ \mathbf{a}_k$; sorvektorai $\mathbf{a}^{(1)},\ \mathbf{a}^{(2)},\cdots,\ \mathbf{a}^{(m)}$.
Legyenek a **B** mátrix oszlopvektorai $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \cdots,\ \mathbf{b}_n$; sorvektorai $\mathbf{b}^{(1)},\ \mathbf{b}^{(2)},\cdots,\ \mathbf{b}^{(k)}$.
Legyenek a **C**=**AB** szorzatmátrix elemei c_{ij}, az oszlopvektorai $\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2,\ \cdots,\ \mathbf{c}_n$; sorvektorai $\mathbf{c}^{(1)},\ \mathbf{c}^{(2)},\cdots,\ \mathbf{c}^{(m)}$.

Az alábbiakban újra elemezzük a mátrixszorzást, az itt levezetésre kerülő számítási módszerek is gyakran előfordulnak a gyakorlati feladatokban..
Összefoglalva megmutatjuk a további számítási módszereket, mindegyik számítási mód egyszerűen levezethető a mátrixszorzás alapdefiníciójából. Javasoljuk az olvasónak ezek mélyebb átgondolását. Célszerű a Falk-sémát is használni.

2.2.4.1. A szorzatmátrix egy-egy elemének meghatározása (ez a definíció)

Az **AB** mátrixszorzás definíciója szerint az eredménymátrix egy-egy elemét egy-egy skaláris szorzással számítjuk ki, képletben

$$c_{ij} = \mathbf{a}^{(i)}\mathbf{b}_j = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} b_{pj},$$

megismételve, tehát az **első helyen** álló mátrix **sorvektorát** skalárisan szorozzuk a **második helyen** álló mátrix **oszlopvektorával**.

2.2.4.2. A szorzatmátrix egy-egy oszlopvektorának meghatározása

Az **AB** szorzatmátrix egy adott oszlopának elemeit (pl. a *j*-edik oszlopot) úgy határozzuk meg, hogy az **A** mátrix sorvektorait skalárisan rendre megszorozzuk a **B** mátrix *j*-edik oszlopvektorával. Ez, a valójában már megismert, mátrix és oszlopvektor szorzásnak felel meg, így $\mathbf{c}_j = \mathbf{A}\mathbf{b}_j$, az eredménymátrix maga pedig az alábbiak szerint írható:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ab}_1 & \mathbf{Ab}_2 & \cdots & \mathbf{Ab}_n \end{bmatrix}.$$

A mátrix és vektor szorzásának lineáris kombinációval való megfogalmazásából az is megállapítható, hogy a szorzatmátrix *j*-edik **oszlopvektora** az **A** mátrix **oszlopvektorainak** a $\mathbf{b}_j$ **oszlopvektor elemeire** vett lineáris kombinációja, azaz

$$\mathbf{c}_j = b_{1j}\mathbf{a}_1 + b_{2j}\mathbf{a}_2 + \ldots + b_{kj}\mathbf{a}_k .$$

2.2.4.3. A szorzatmátrix egy-egy sorvektorának meghatározása

Az **AB** szorzatmátrix egy adott sorának elemeit (pl. az *i*-edik sort) úgy határozzuk meg, hogy az **A** mátrix *i*-edik **sorvektorát** skalárisan rendre megszorozzuk a **B** mátrix oszlopvektoraival. Ez, a valójában már megismert, sorvektor és mátrix szorzásnak felel meg, így $\mathbf{c}^{(i)} = \mathbf{a}^{(i)}\mathbf{B}$, az eredménymátrix maga pedig az alábbiak szerint írható:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{B} \\ \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(m)}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

A vektor és mátrix szorzásának lineáris kombinációval való megfogalmazásából az is megállapítható, hogy a szorzatmátrix i-edik **sorvektora** a **B** mátrix **sorvektorainak** az $\mathbf{a}^{(i)}$ **sorvektor elemeire** vett lineáris kombinációja, azaz

$$\mathbf{c}^{(i)} = a_{i1}\mathbf{b}^{(1)} + a_{i2}\mathbf{b}^{(2)} + \ldots + a_{ik}\mathbf{b}^{(k)}.$$

2.2.4.4. A szorzatmátrix meghatározása diadikus szorzatok összegeként

Most is induljunk ki a mátrixszorzás definíciójából, amely szerint az eredménymátrix egy-egy elemét egy-egy skaláris szorzással számítjuk ki, képletben

$$c_{ij} = \mathbf{a}^{(i)}\mathbf{b}_j = \sum_{p=1}^{k} a_{ip}b_{pj}.$$

Ismert, hogy ha az **A** mátrix p-edik oszlopvektorát **diadikusan** megszorozzuk az **B** mátrix p-edik sorvektorával, akkor olyan mátrixot kapunk, amelynek ij eleme az alábbi

$$\left(\mathbf{a}_p\mathbf{b}^{(p)}\right)_{ij} = a_{ip}b_{pj}.$$

Ezt behelyettesítve a fenti c_{ij} képletbe, kapjuk, hogy

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{k}\left(\mathbf{a}_p\mathbf{b}^{(p)}\right)_{ij},$$

amelyből a **C** eredménymátrix azonnal adódik:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \sum_{p=1}^{k}\mathbf{a}_p\mathbf{b}^{(p)},$$

vagyis a **C** eredménymátrix a **A** mátrix indexben azonos **oszlopvektorának** és a **B** mátrix indexben azonos **sorvektorának** diadikus szorzatából adódó mátrixok összege. Az összefüggésekben a diadikus szorzást az $\mathbf{a}_p\mathbf{b}^{(p)}$ szimbólummal jelöltük, nem használtuk, sem a mátrixszorzatos, sem a vektorszorzatos jelölést, mivel mátrixnak a vektorairól volt szó és azok indexeléséből látható, hogy oszlopvektort szorzunk sorvektorral.

2.2.5. Mátrix hatványozása

Ha egy **A** mátrix sorainak és oszlopainak száma megegyezik (négyzetes mátrix), akkor elvégezhető az **AA** művelet, amelyet a mátrix négyzetének nevezünk és $\mathbf{A}^2$-el jelölünk. Hasonlóan értelmezhető az $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{A}^4$, stb. hatvány is, általánosan

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{AA}\cdots\mathbf{A} \quad (\mathbf{A}\ n\text{-szer ismétlődik tényezőként}).$$

Az $\mathbf{AA}\cdots\mathbf{A}$ hatványművelet a mátrixszorzás asszociativitása miatt bárhogyan zárójelezhető. Igaz például, hogy $\mathbf{A}^9 = \mathbf{A}^4\mathbf{A}^5 = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^3\mathbf{A}^4$.

<u>Példa</u>:
Legyen adott az $\mathbf{A} \in R^{3\times 3}$ mátrix. Számítsuk ki az $\mathbf{A}^4$ hatványt!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}^4$ művelet elvégezhető a méretek miatt, az eredménymátrix rendje 3 lesz. A műveletet lépésekben végezzük el, először az $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$, majd az $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A}$, végül pedig az $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3\mathbf{A}$ számítása következik.

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{AAAA} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 287 & 101 & 170 \\ 133 & 48 & 74 \\ 154 & 53 & 96 \end{bmatrix}.$$

A fenti művelet a Falk-sémával egyszerűbben elvégezhető, így is elvégezzük a műveletet.

			3	1	2	3	1	2	3	1	2	
			1	0	2	1	0	2	1	0	2	
			2	1	0	2	1	0	2	1	0	
3	1	2	14	5	8	63	22	38	287	101	170	
1	0	2	7	3	2	28	9	20	133	48	74	$\leftarrow \mathbf{A}^4$
2	1	0	7	2	6	35	13	18	154	53	96	

A Falk-sémának megfelelő módon leírjuk kétszer az **A** mátrixot, felkészülve az **AA** szorzásra. Ennek elvégzése után felírjuk az **A** mátrixot, felkészülve az $\mathbf{A}^2\mathbf{A}$ szorzásra, Hasonlóan végezzük az $\mathbf{A}^3\mathbf{A}$ szorzást is. Így az alsó részen a második mátrix az $\mathbf{A}^2$, a harmadik mátrix az $\mathbf{A}^3$, az utolsó mátrix pedig a keresett $\mathbf{A}^4$ mátrix. A Falk-séma segítségével sokkal kevesebb írással végezhető el a művelet.
Az asszociativ tulajdonságot felhasználva, az $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^2$ műveletvégzéssel hamarabb eredményhez jutunk, ezt mutatja az alábbi számolás.

			14	5	8	
			7	3	2	
			7	2	6	
14	5	8	287	101	170	
7	3	2	133	48	74	$\leftarrow \mathbf{A}^4$
7	2	6	154	53	96	

2.3. Speciális mátrixok

2.3.1. Négyzetes mátrix

Az **A** mátrix négyzetes vagy más szóval kvadratikus, ha sorainak és oszlopainak száma megegyezik. Az **A** *n x n*-es négyzetes mátrix rendje *n*. Egy négyzetes mátrix a_{11} és a_{nn} elemeit összekötő „vonalat” a mátrix főátlójának nevezzük. A főátlóbeli elemeket tehát azok a mátrixelemek alkotják, amelyeknek sor- és oszlopindexe azonos. Az a_{1n} és a_{n1} elemeit összekötő „vonalat" pedig a mátrix mellékátlójának nevezzük.

2.3.2. Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrix

Egy négyzetes mátrix szimmetrikus, ha $a_{ij} = a_{ji}$, azaz a főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő elemek azonosak.
Egy négyzetes mátrix ferdén szimmetrikus, ha $a_{ij} = - a_{ji}$, azaz a főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő elemek ellenkező előjelüek, de abszolút értékük azonos.
Mátrixjelöléssel megfogalmazva a fentieket: az $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ mátrix szimmetrikus, ha $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$, ferdén szimmetrikus, ha $\mathbf{A}= -\mathbf{A}^T$.

2.3.3. Egységmátrix

Az egységmátrix olyan négyzetes mátrix, amelynek a főátlójában 1-es, a többi helyen pedig zérus áll. Az egységmátrix sorai és oszlopai is egységvektorok úgy, hogy az 1. sorvektor és az 1. oszlopvektor az első egységvektor, a 2. sorvektor és a 2. oszlopvektor a második egységvektor, stb. Jele: **E** vagy **I**.

Példa:
Egy *4x4*-es egységmátrix az alábbi:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.4. Inverzmátrix

Az egységmátrixhoz kapcsolódóan definiáljuk az inverz mátrixot. Az **A** négyzetes mátrix inverz mátrixán (vagy röviden inverzén) azt az **X** négyzetes mátrixot értjük, amelyre

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{E},$$

ahol **E** az egységmátrix. Az **A** mátrix inverzének jelölésére szokás az $\mathbf{A}^{-1}$ jelölést használni. A mátrix inverze a skalár szám inverzével (reciprokával) analóg módon van definiálva, ugyanis egy a szám inverze az az x szám, amelyre ax=1, tehát $x=a^{-1}=1/a$. A mátrixok körében azonban az **X**=**E**/**A** nem írható, mivel az osztás nincs értelmezve.
Részletesebben is megvizsgáljuk az inverzmátrixot.

- Tudjuk, hogy az **AX** mátrix oszloponkénti számítása az alábbi, ahol $\mathbf{x}_j$ az inverzmátrix j-edik **oszlopvektora**:

  $$\mathbf{AX} = [\mathbf{Ax}_1 \quad \mathbf{Ax}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{Ax}_n].$$

  Az **E**=**AX** definícióból írható, hogy $\mathbf{e}_j=\mathbf{Ax}_j$, ami a lineáris kombinációval megfogalmazva a következőképpen írható:

  $$\mathbf{e}_j = \mathbf{Ax}_j = x_{1j}\mathbf{a}_1 + x_{2j}\mathbf{a}_2 + \ldots + x_{nj}\mathbf{a}_n .$$

Ez utóbbiból kiolvashatjuk, hogy az inverzmátrix **oszlopainak** elemei arra adnak választ, hogy az **A** mátrix **oszlopvektorainak** milyen lineáris kombinációja állítja elő az egységvektorokat.

- Tudjuk, hogy az **XA** mátrix soronkénti számítása az alábbi, ahol $\mathbf{x}^{(i)}$ az inverzmátrix *i*-edik **sorvektora**:

$$\mathbf{XA} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)}\mathbf{A} \\ \mathbf{x}^{(2)}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(m)}\mathbf{A} \end{bmatrix}$$

Az **E**=**XA** definícióból írható, hogy $\mathbf{e}_i=\mathbf{x}^{(i)}\mathbf{A}$, ami a lineáris kombinációval megfogalmazva a következő:

$$\mathbf{e}_i = x_{i1}\mathbf{a}^{(1)} + x_{i2}\mathbf{a}^{(2)} + \ldots + x_{in}\mathbf{a}^{(n)}.$$

Ez utóbbiból kiolvashatjuk, hogy az inverzmátrix **sorainak** elemei arra adnak választ, hogy az **A** mátrix **sorvektorainak** milyen lineáris kombinációja állítja elő az egységvektorokat.

Az inverzmátrix meghatározását e segédletben nem ismertetjük, csupán megmutatjuk a 2×2-es mátrix inverzének egyszerű meghatározását:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Az inverzmátrix helyességének megállapítását az olvasóra bízzuk. Ha az inverzmátrixot az

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$$

formában keresi és a definíciót használja az olvasó, akkor megtapasztalhatja, hogy az inverzmátrix elemeit két darab kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldása szolgáltatja.

2.3.5. Permutáció mátrix

A permutáció mátrix olyan négyzetes mátrix, amelynek minden sorában és oszlopában pontosan egy darab 1-es áll, a többi elem zérus. Tehát a sorai és oszlopai is egységvektorok, de fontos, hogy ezek egymástól különbözőek, így minden sorban és minden oszlopban pontosan egy darab 1-es van.

Példa:
Egy *4x4*-es permutáció mátrix az alábbi:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.6. Diagonális mátrix

A diagonális mátrix olyan négyzetes mátrix, amelynek diagonális (főátlóban lévő) elemein kívüli elemei zérusok.

<u>**Példa**</u>:
Egy *4x4*-es diagonális mátrix az alábbi:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

A diagonális mátrixot **vektor** segítségével is meg lehet adni úgy, hogy a vektor elemei a diagonális mátrix elemei. A példabeli **D** mátrixot a **d**=(5, 3, -2, 7) vektorral is megadhatjuk. A diagonális mátrixot ekkor a <**d**> szimbólummal jelöljük, azaz **D**=<**d**>.

2.4. Műveletek speciális vektorokkal és mátrixokkal

A következőkben megvizsgáljuk a speciális elemekkel való műveletek eredményét. A műveletekben szereplő vektorok és mátrixok méretét olyannak tekintjük, amilyen a művelet elvégzéséhez szükséges, azaz konformábilisnek. Az alábbi állítások mindegyike a műveletek definíciójából nyilvánvaló.

2.4.1. Egységvektorral való szorzás

a) Ha egy vektort skalárisan az i-edik egységvektorral szorozzuk, akkor a vektor i-edik koordinátáját kapjuk, azaz $\mathbf{a}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i\,\mathbf{a} = a_i$.

b) Ha egy mátrixot a j-edik egységvektorral **jobbról** szorzunk, akkor a mátrix j-edik **oszlopvektorát** kapjuk, azaz $\mathbf{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j$. Az $\mathbf{A}\mathbf{e}_j$ vektor az **A** mátrix oszlopvektorainak az $\mathbf{e}_j$ egységvektorral vett lineáris kombinációja, a lineáris kombinációban pedig csak a j-edik tag nem zérus.

c) Ha egy mátrixot az i-edik egységvektorral **balról** szorzunk, akkor a mátrix i-edik **sorvektorát** kapjuk, azaz $\mathbf{e}_i\mathbf{A} = \mathbf{a}^{(i)}$. Az $\mathbf{e}_i\mathbf{A}$ vektor az **A** mátrix sorvektorainak az $\mathbf{e}_i$ egységvektorral vett lineáris kombinációja, a lineáris kombinációban pedig csak az i-edik tag nem zérus.

d) Ha egy mátrixot az i-edik egységvektorral **balról** és j-edik egységvektorral **jobbról** szorzunk, akkor a mátrix a_{ij} elemét kapjuk, azaz $\mathbf{e}_i\mathbf{A}\mathbf{e}_j = a_{ij}$.

2.4.2. Összegzővektorral való szorzás

a) Ha egy vektort skalárisan az összegzővektorral szorzunk (**x1**=**1x**), akkor a vektor elemeinek összegét kapjuk.

b) Ha egy mátrixot az összegzővektorral **jobbról** szorzunk (**A1**), akkor a mátrix minden sorára a sorban lévő elemek összegét kapjuk. Az **A1** vektor elemei a sorvektorok összegzővektorral való skaláris szorzatai, így **A1** vektor elemei a sorvektorok elemeinek összege.

c) Ha egy mátrixot az összegzővektorral **balról** szorzunk (**1A**), akkor a mátrix minden oszlopára az oszlopban lévő elemek összegét kapjuk. Az **1A** vektor elemei az oszlopvektorok összegzővektorral való skaláris szorzatai, így **1A** vektor elemei a oszlopvektorok elemeinek összege.

d) Ha egy mátrixot az összegzővektorral balról is és jobbról is szorzunk (**1A1**), akkor a mátrix elemeinek összegét kapjuk.

2.4.3. Egységmátrix-szal való szorzás

Ha egy vektort ill. egy mátrixot az egységmátrix-szal szorzunk, akár jobbról, akár balról, az eredeti vektort ill. mátrixot kapjuk, azaz $\mathbf{Ex}=\mathbf{x}$, $\mathbf{yE}=\mathbf{y}$, $\mathbf{AE}=\mathbf{A}$, $\mathbf{EB}=\mathbf{B}$.

2.4.4. Permutáció mátrix-szal való szorzás

a) Ha egy vektort a permutáció mátrix-szal szorzunk **yP** alakban, akkor a szorzás az **y** vektor elemeinek sorrendjét cseréli fel. Az elemek új helyét a permutáció mátrix **oszlopvektorainak**, mint egységvektoroknak a sorrendje határozza meg. Az **yP** vektor j-edik eleme $\mathbf{yp}_j$. Ha $\mathbf{p}_j=\mathbf{e}_k$, akkor a j-edik elem $\mathbf{yp}_j=\mathbf{ye}_k=y_k$.
Például a fenti **P** permutáció mátrix esetén $\mathbf{yP} = (y_3,\ y_1,\ y_4,\ y_2)$.

b) Ha egy vektort a permutáció mátrix-szal szorzunk **Px** alakban, akkor a szorzás az **x** vektor elemeinek sorrendjét cseréli fel. Az elemek új helyét a permutáció mátrix **sorvektorainak**, mint egységvektoroknak a sorrendje határozza meg. A **Px** vektor i-edik eleme $\mathbf{p}^{(i)}\mathbf{x}$. Ha $\mathbf{p}^{(i)}=\mathbf{e}_k$, akkor $\mathbf{p}^{(i)}\mathbf{x}=\mathbf{e}_k\mathbf{x}=x_k$.
Például a fenti **P** permutáció mátrix esetén $\mathbf{Px} = (x_2,\ x_4,\ x_1,\ x_3)$.

c) Ha egy mátrixot a permutáció mátrix-szal szorzunk **AP** alakban, akkor a szorzás az **A** mátrix **oszlopvektorainak** sorrendjét cseréli fel. Az oszlopvektorok új helyét a permutáció mátrix **oszlopvektorainak**, mint egységvektoroknak a sorrendje határozza meg. Az **AP** mátrix j-edik oszlopvektora $\mathbf{Ap}_j$. Ha $\mathbf{p}_j=\mathbf{e}_k$, akkor a j-edik oszlopvektor $\mathbf{Ap}_j=\mathbf{Ae}_k=\mathbf{a}_k$.
Például a fenti **P** permutáció mátrix esetén az **AP** olyan mátrix, amelynek első oszlopvektora az eredeti 3., 2. oszlopvektora az eredeti 1., 3. oszlopvektora az eredeti 4., 4. oszlopvektora pedig az eredeti 2. oszlopvektor.

d) Ha egy mátrixot a permutáció mátrix-szal szorzunk **PA** alakban, akkor a szorzás az **A** mátrix **sorvektorainak** sorrendjét cseréli fel. A sorvektorok új helyét a permutáció mátrix **sorvektorainak**, mint egységvektoroknak a sorrendje határozza meg. A **PA** mátrix i-edik sorvektora $\mathbf{p}^{(i)}\mathbf{A}$. Ha $\mathbf{p}^{(i)}=\mathbf{e}_k$, akkor az i-edik sorvektor $\mathbf{p}^{(i)}\mathbf{A}=\mathbf{e}_k\mathbf{A}=\mathbf{a}^{(k)}$.
Például a fenti **P** permutáció mátrix esetén a **PA** olyan mátrix, amelynek első sorvektora az eredeti 2., 2. sorvektora az eredeti 4., 3. sorvektora az eredeti 1., 4. sorvektora pedig az eredeti 3. sorvektor.

2.4.5. Diagonális mátrix-szal való szorzás

a) Ha egy vektort a diagonális mátrix-szal szorzunk akár jobbról akár balról (**Dx** vagy **yD**), akkor a szorzás a vektor *i*-edik elemét megszorozza a diagonális mátrix *i*-edik diagonál elemével, azaz d_{ii}-vel vagy $\mathbf{D}=\langle\mathbf{d}\rangle$ jelölés esetén a d_i vektorelemmel.
Például a fenti **D** diagonális mátrix esetén $\mathbf{Dx} = \mathbf{xD} = (5x_1, 3x_2, (-2)x_3, 7x_4)$.

b) Ha egy mátrixot a diagonális mátrix-szal szorzunk **AD** alakban, akkor a szorzás a mátrix megfelelő **oszlopvektorait** megszorozza a diagonális mátrix megfelelő diagonális elemeivel, azaz a *j*-edik oszlopvektort a *j*-edik diagonál elemmel d_{jj}-vel, vagy $\mathbf{D}=\langle\mathbf{d}\rangle$ jelölés esetén a d_j vektorelemmel. Az **AD** mátrix *j*-edik oszlopvektora $\mathbf{Ad}_j$. Mivel $\mathbf{d}_j=d_{jj}\mathbf{e}_j$, így $\mathbf{Ad}_j = d_{jj}\mathbf{Ae}_j= d_{jj}\mathbf{a}_j$.
Például a fenti **D** diagonális mátrix esetén **AD** olyan mátrix, amelynek első oszlopvektora az eredeti 5-szöröse, 2. oszlopvektora az eredeti 3-szorosa, 3. oszlopvektora az eredeti (-2)-szerese, 4. oszlopvektora az eredeti 7-szerese lesz.

c) Ha egy mátrixot a diagonális mátrix-szal szorzunk **DA** alakban, akkor a szorzás a mátrix megfelelő **sorvektorait** megszorozza a diagonális mátrix megfelelő diagonális elemeivel, azaz az *i*-edik sorvektort az *i*-edik diagonál elemmel d_{ii}-vel vagy $\mathbf{D}=\langle\mathbf{d}\rangle$ jelölés esetén a d_i vektorelemmel. A **DA** mátrix *i*-edik sorvektora $\mathbf{d}^{(i)}\mathbf{A}$. Mivel $\mathbf{d}^{(i)}=d_{ii}\mathbf{e}_i$, így $\mathbf{d}^{(i)}\mathbf{A}= d_{ii}\mathbf{e}_i\mathbf{A}= d_{ii}\mathbf{a}^{(i)}$.
Például a fenti **D** diagonális mátrix esetén **DA** olyan mátrix, amelynek első sorvektora az eredeti 5-szöröse, 2. sorvektora az eredeti 3-szorosa, 3. sorvektora az eredeti (-2)-szerese, 4. sorvektora az eredeti 7-szerese lesz.

d) Ha egy diagonális mátrixot a *k*-adik hatványra emelünk, akkor szintén diagonális mátrixot kapunk, amelyben a diagonális elemek az eredeti diagonális elem *k*-adik hatványai lesznek.

Összefoglalva megállapítható, hogy egy mátrix **sorvektorainak** cseréjét vagy számmal való szorzását **balról** való szorzással, egy mátrix **oszlopvektorainak** cseréjét vagy számmal való szorzását **jobbról** való szorzással lehet megvalósítani. **Cserénél permutáció** mátrixot, **számmal való szorzásnál diagonális** mátrixot használunk.

3. Vektor- és mátrixműveletek gyakorlása szöveges példákkal

Az előzőekben olyan példákat ismertettünk, amelyeknek az volt a célja, hogy begyakoroljuk a mátrix és vektor műveleteket. Tehát megadtuk a mátrixokat, vektorokat és ki kellett számítani a kijelölt műveleteket. Megmutattuk a mátrixműveletek kiszámítását segítő sémák alkalmazását is. A következőkben olyan példákat veszünk sorra, amelyben adott egy probléma és annak megoldását mátrixműveletekkel kell megadnunk. Ez sokkal nehezebb feladat lesz, itt kristálytisztán kell ismerni a műveleteket, hiszen nekünk kell megtalálni a sokfajta mátrixművelet közül a helyeset. Általánosságban elmondható, hogy azokat a feladatokat, amelyekben konkrét számadatok vannak, sokkal könnyebb megoldani. Ezért az ismeretek mélyebb elsajátítása miatt megoldunk olyan feladatokat is, amelyekben nem szerepelnek számadatok.

Példa:
Egy vállalat 4 terméket (T) gyárt és mindegyiket ugyanabból a 3-féle alkatrészből (A) szereli össze csak más-más mennyiségben. Egy darab termék előállításához szükséges alkatrészek számát az alábbi táblázat tartalmazza. Az egyes termékekből megrendelt mennyiség rendre 50, 70, 40, 30 darab. Az alkatrészek egységárai rendre 3, 1, 2 pénzegység.

	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	5	2	4	3
A_2	1	2	1	3
A_3	2	1	2	1

Adja meg a választ az alábbi kérdésekre mátrixműveletek segítségével!
a) Az egyes alkatrészekből hány darab szükséges a megrendelés teljesítéséhez?
b) Mennyi az egyes termékek anyagköltsége?
c) Mennyi a megrendeléshez szükséges anyagköltség?
d) Az egyes termékekbe összesen hány darab alkatrészt kell beszerelni?

Megoldás:
A megrendelt mennyiségeket és az árakat rendezzük vektorokba, az **x** vektor legyen a megrendelés vektora, a **p** pedig az árvektor, azaz **q** = (50, 70, 40, 30), **p** = (3, 1, 2). Az alkatrészszükségletet tartalmazó táblázatból pedig készítsük el az **A** alkatrészszükséglet mátrixot, amely az alábbi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Válasz az a) kérdésre:
Az egyes alkatrészekből hány darab szükséges a megrendelés teljesítéséhez?

Az **első termék** egy darabja előállításának alkatrészszükségletét alkatrészenként az $\mathbf{a}_1$ oszlopvektor adja. Ha az első termékből 50 darabot kell előállítani, akkor ennek alkatrészszükséglete $50\mathbf{a}_1$. Mind a négy terméknél hasonlóan határozható meg az alkatrészszükséglet. A megrendeléshez szükséges alkatrészszükségletet ezek összege adja, azaz:

$$50\,\mathbf{a}_1+70\,\mathbf{a}_2+40\,\mathbf{a}_3+30\,\mathbf{a}_4.$$

Ez pedig az **A** mátrix **oszlopvektorainak** lineáris kombinációja, amiből következik, hogy az alkatrészszükségletet az **Aq** mátrix-vektor művelettel írhatjuk le.
Okoskodhatunk az alábbiak szerint is: Az **első alkatrészből** a teljes megrendeléshez szükséges mennyiséget úgy kapjuk, hogy mind a 4 termék esetén kiszámítjuk az első alkatrészből szükséges mennyiséget és ezeket összeadjuk, azaz

$$5\cdot 50 + 2\cdot 70 + 4\cdot 40 + 3\cdot 30,$$

ez pedig vektorműveletekkel az $\mathbf{a}^{(1)}\mathbf{q}$ skaláris szorzat alakban írható. Hasonlóan számítható a 2. és a 3. alkatrészből szükséges mennyiség, amelyek $\mathbf{a}^{(2)}\mathbf{q}$ és $\mathbf{a}^{(3)}\mathbf{q}$. Ha ezeket a mennyiségeket az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{q} \\ \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{q} \\ \mathbf{a}^{(3)}\mathbf{q} \end{bmatrix}$$

vektorba foglaljuk, azonnal látható a mátrixszorzás definíciójából, hogy itt egy mátrix-vektor szorzásról (**jobbról** szorzás) van szó, azaz a keresett művelet az **Aq**.

A mátrixműveletes megoldás:

$$\mathbf{Aq} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 640 \\ 320 \\ 280 \end{bmatrix}.$$

Mint korábban láttuk, célszerű a számítást egy sémában végezni. Érdemes a sémába nem csak a számadatokat beírni, hanem a mátrix soraira ill. oszlopaira jellemző információkat is. Ez sokkal jobban megkönnyíti a művelet megállapítását is ezért célszerű a feladatmegoldás első lépéseként felrajzolni a sémát.
A számolás sémája:

q →		50	70	40	30		
		T_1	T_2	T_3	T_4		
	A_1	5	2	4	3	640	
A →	A_2	1	2	1	3	320	← **Aq**
	A_3	2	1	2	1	280	

Válasz a b) kérdésre:
Mennyi az egyes termékek anyagköltsége?

Az **első alkatrészből** az alkatrészszükségletet termékenként az $\mathbf{a}^{(1)}$ sorvektor adja. Ha az első alkatrész ára 3 pénzegység, akkor a termékenkénti alkatrészszükséglet pénzben kifejezve, azaz az anyagköltség $3\cdot\mathbf{a}^{(1)}$. Mind a három alkatrésznél hasonlóan határozható meg a anyagköltség. A termékenkénti anyagköltség tehát

$$3 \cdot \mathbf{a}^{(1)} + 1 \cdot \mathbf{a}^{(2)} + 2 \cdot \mathbf{a}^{(3)}.$$

Ez pedig az **A** mátrix **sorvektorainak** lineáris kombinációja, amiből következik, hogy a termékenkénti anyagköltséget a **pA** vektor-mátrix művelettel írhatjuk le.
Okoskodhatunk az alábbiak szerint is: Az **első termékhez** az anyagköltséget úgy kapjuk, hogy mind a 3 alkatrész esetén kiszámítjuk az anyagköltséget és ezeket összeadjuk, azaz

$$3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2,$$

ez pedig vektorműveletekkel $\mathbf{pa}_1$ skaláris szorzat alakban írható. Hasonlóan számítható a 2., 3. és a 4. termék anyagköltsége. Ha ezeket a mennyiségeket a

$$[\mathbf{pa}_1 \quad \mathbf{pa}_2 \quad \mathbf{pa}_3 \quad \mathbf{pa}_4]$$

vektorba foglaljuk, azonnal látható a mátrixszorzás definíciójából, hogy itt egy vektor-mátrix szorzásról (**balról** szorzás) van szó, azaz a keresett művelet az **pA**.

A mátrixműveletes megoldás:

$$\mathbf{pA} = [3 \quad 1 \quad 2] \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = [20 \quad 10 \quad 17 \quad 14].$$

A számításokat az alábbi sémában is elvégezzük.

			T_1	T_2	T_3	T_4	
	3	A_1	5	2	4	3	
p →	1	A_2	1	2	1	3	← **A**
	2	A_3	2	1	2	1	
			20	10	17	14	← **pA**

<u>Válasz a c) kérdésre</u>:
Mennyi a megrendeléshez szükséges anyagköltség?

Az előző számításból ismert, hogy a megrendelés teljesítéséhez alkatrészenként mennyi alkatrész szükséges (**Aq**). Az alkatrészmennyiségeket rendre meg kell szorozni az alkatrészárakkal és a szorzatokat össze kell adni, hogy megkapjuk a megrendeléshez szükséges anyagköltséget. Ez egy skaláris szorzással, mégpedig a **p**(**Aq**) skaláris szorzattal adható meg.
Az eredmény: **p**(**Aq**) = $3 \cdot 640 + 1 \cdot 320 + 2 \cdot 280 = 2800$.
Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az egyes termékek anyagköltségét (**pA** vektor elemeit) rendre megszorozzuk a megrendelésekkel és ezeket összegezzük, azaz ekkor a (**pA**)**q** skaláris szorzattal számolhatjuk ki az anyagköltséget.
Az eredmény: (**pA**)**q**$= 20 \cdot 50 + 10 \cdot 70 + 17 \cdot 40 + 14 \cdot 30 = 2800$.
Mint tudjuk általánosan is igaz, hogy **p**(**Aq**)=(**pA**)**q**, ezért ezt szokás **pAq** alakban is írni. Ennek számítását az alábbi sémában végezzük el:

			50	70	40	30	← **q**
			T_1	T_2	T_3	T_4	
	3	A_1	5	2	4	3	
p →	1	A_2	1	2	1	3	← **A**
	2	A_3	2	1	2	1	

Az eredmény: **pAq** = $3 \cdot 5 \cdot 50 + 3 \cdot 2 \cdot 70 + 3 \cdot 4 \cdot 40 + \ldots + 2 \cdot 1 \cdot 30 = 2800$. Javasoljuk az olvasónak, hogy értelmezze az anyagköltség **pAq** alakban történő számítását.

Válasz a d) kérdésre:
Az egyes termékekbe összesen hány darab alkatrészt kell beszerelni?

Az egyes termékekbe beszerelendő alkatrészek számának meghatározásához az **A** mátrix egyes oszlopaiban lévő alkatrész darabszámokat kell összeadni. Ezt pedig az összegzővektorral való szorzással valósíthatjuk meg. Mivel oszlopösszegekről van szó, így a balról szorzást kell alkalmazni, azaz a megoldást a mátrixműveletekkel az **1A** formulával fogalmazhatjuk meg, amelynek eredménye: **1A**=(8, 5, 7, 7), ahol **1**=(1, 1, 1).

Példa:
Legyen 3 féle gyümölcslé (G), amelyeknek elegyítéséből 4 féle gyümölcskoktélt (továbbiakban koktélt) (K) készítünk. A felhasznált gyümölcslevekben 5 féle vitamin (V) van. Az alábbi táblázatok a következő adatokat tartalmazzák:

- a koktélok előállításához szükséges gyümölcslé mennyiséget (G-K táblázat),
- a gyümölcslevek egységnyi mennyiségében található vitamin mennyiséget (G-V táblázat),
- a gyümölcslevek egységárát (e.ár),
- a gyümölcslevekből vásárolt mennyiséget (v.m.),
- a koktélokból előállított mennyiséget (eá.m.),
- az egyes vitaminokból előírt mennyiséget (eí.m.).

	K_1	K_2	K_3	K_4	e.ár	v.m.
G_1	1	2	2	2	5	50
G_2	0	3	0	1	2	30
G_3	2	0	1	1	4	20
eá.m.	30	20	40	10		

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
G_1	2	1	0	3	1
G_2	1	1	1	0	2
G_3	1	2	2	1	1
eí.v.	5	6	3	5	7

Mielőtt a kérdéseket feltennénk, a táblázatban szereplő adatokból definiáljuk a mátrixokat és a vektorokat. Két mátrixot adunk meg, az **A** és **B** mátrixot.

Az **A** mátrix a_{ij} eleme jelölje azt, hogy az j-edik koktél előállításához az i-edik gyümölcsléből mennyit használunk fel. Az **A** mátrix $\mathbf{a}^{(i)}$ sorvektora az i-edik gyümölcsléből az egyes koktélokhoz szükséges mennyiséget, az $\mathbf{a}_j$ oszlopvektora a j-edik koktélhoz szükséges gyümölcslé mennyiséget mutatja.

A **B** mátrix b_{ij} eleme jelentse azt, hogy az i-edik gyümölcslé egységnyi mennyiségében mennyi vitamin van a j-edik fajta vitaminból. A **B** mátrix $\mathbf{b}^{(i)}$ sorvektora az i-edik gyümölcslé vitamintartalma az egyes vitaminokból, a $\mathbf{b}_j$ oszlopvektora az egyes gyümölcslevek vitamintartalma a j-edik vitaminból.

A **p** vektor p_i eleme jelölje az i-edik gyümölcslé egységárát.
A **q** vektor q_i eleme jelölje az i-edik gyümölcsléből vásárolt mennyiséget.
A **v** vektor v_i eleme jelölje az i-edik koktélból előállított mennyiséget.
A **d** vektor d_i eleme jelölje az i-edik vitaminból előírt mennyiséget.

A példabeli mátrixok és vektorok a következők:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\0&3&0&1\\2&0&1&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&1&0&3&1\\1&1&1&0&2\\1&2&2&1&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{p}=\begin{bmatrix}5\\2\\4\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}=\begin{bmatrix}50\\30\\20\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}30\\20\\40\\10\end{bmatrix},\quad \mathbf{d}=\begin{bmatrix}5\\6\\3\\5\\7\end{bmatrix}.$$

Adja meg a választ az alábbi kérdésekre mátrixműveletek segítségével!

1. Mennyi az elkészített koktélok egységára? Az árnál csak a gyümölcslevek árát vegyük figyelembe!
2. A gyümölcslé összekeverésével keletkező egyes koktélokban az egyes vitaminokból mekkora mennyiségű vitamin van?
3. Mennyi pénzből tudjuk előállítani a **v** vektornak megfelelő mennyiségben készült koktélokat? Az árnál csak a gyümölcslevek árát vegyük figyelembe!
4. Van-e a K_2 koktélban a **d** vektor által előírt mennyiség?
5. Mennyi koktél állítható elő a **q** mennyiségben vásárolt gyümölcslevekből?

Válasz az 1. kérdésre:
Mennyi az elkészített koktélok egységára? Az árnál csak a gyümölcslevek árát vegyük figyelembe!
Az egyes koktélok előállításához az i-edik gyümölcsléből szükséges mennyiséget az $\mathbf{a}^{(i)}$ **sorvektor** adja, ha ezt megszorozzuk a G_i gyümölcslé árával, p_i-vel, akkor a pénzben kifejezett G_i gyümölcslé mennyiséget kapjuk, a

$$p_1 \cdot \mathbf{a}^{(1)} + p_2 \cdot \mathbf{a}^{(2)} + p_3 \cdot \mathbf{a}^{(3)}$$

adja a három gyümölcslé elegyítésével kapott koktélok egységárát, amely a **sorvektorok** lineáris kombinációja, ezt pedig a **pA** mátrixszorzásnak felel meg.

Másképpen gondolkodva: A j-edik koktél gyümölcslé tartalmát az $\mathbf{a}_j$ oszlopvektor mutatja, ha ennek elemeit az egyes gyümölcslé árakkal beszorozzuk és a szorzatokat összeadjuk, akkor a K_j koktél gyümölcslé tartalmát kapjuk pénzben kifejezve, amely képletben $\mathbf{pa}_j$. Az összes koktélra pedig a **p** vektor és az oszlopvektorok skaláris szorzata, azaz a **pA** mátrixszorzás adja az eredményt.

$$\mathbf{pA}=\begin{bmatrix}5&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2&2\\0&3&0&1\\2&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&16&14&16\end{bmatrix}.$$

A megoldás séma segítségével:

$$\mathbf{p} \rightarrow \begin{array}{|c|}\hline 5 \\ 2 \\ 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc|} & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ \hline G_1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ G_2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ G_3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \leftarrow \mathbf{A}$$

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 13 & 16 & 14 & 16 \\ \hline \end{array} \leftarrow \mathbf{pA}$$

Válasz a 2. kérdésre:
A gyümölcslé összekeverésével keletkező egyes koktélokban az egyes vitaminokból mekkora mennyiségű vitamin van?

Azt a **táblázatot** keressük, amely az egyes koktélokban lévő vitaminok tartalmát mutatja, **mátrixos** megfogalmazással, pedig azt a **C mátrixot** keressük, amelynek c_{ij} eleme megmutatja, hogy a j-edik koktél (K_j) mennyi vitamint tartalmaz az i-edik vitaminból (V_i). Határozzuk meg a c_{23} elemet. Hogy jobban tudjuk követni a megoldáshoz vezető utat, javasoljuk az **A** és **B** mátrixokat ill. azok sémáját (szegélyekkel) felrajzolni.

$$\begin{array}{c|cccc|} & K_1 & K_2 & \mathbf{K_3} & K_4 \\ \hline G_1 & 1 & 2 & \mathbf{2} & 2 \\ G_2 & 0 & 3 & \mathbf{0} & 1 \\ G_3 & 2 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc|} & V_1 & \mathbf{V_2} & V_3 & V_4 & V_5 \\ \hline G_1 & 2 & \mathbf{1} & 0 & 3 & 1 \\ G_2 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 \\ G_3 & 1 & \mathbf{2} & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

A K_3 koktél a G_1 gyümölcsléből 2 (a_{13}) mennyiséget tartalmaz, egységnyi G_1 gyümölcslében 1 (b_{12}) V_2 vitamin van, így a K_3 koktél V_2 vitamintartalma $2 \cdot 1$ ($a_{13} \cdot b_{12}$), ezt a vitamintartalmat G_1 gyümölcslé adja.
A G_2 gyümölcslé is adhat V_2 vitamint a K_3 koktélnak, ez a következőképpen számolható. A K_3 koktél a G_2 gyümölcsléből 0 (a_{23}) mennyiséget tartalmaz, egységnyi G_2 gyümölcslében 1 (b_{22}) V_2 vitamin van, így a K_3 koktél V_2 vitamintartalma $0 \cdot 1$ ($a_{23} \cdot b_{22}$), ezt a vitamintartalmat a G_2 gyümölcslé adja, valójában a példában nem ad.
A G_3 gyümölcslé is ad V_2 vitamint a K_3 koktélnak, ez a következőképpen számolható. A K_3 koktél a G_3 gyümölcsléből 1 (a_{33}) mennyiséget tartalmaz, egységnyi G_3 gyümölcslében 2 (b_{32}) V_2 vitamin van, így a K_3 koktél V_2 vitamintartalma $1 \cdot 2$ ($a_{33} \cdot b_{32}$), ezt a vitamintartalmat a G_3 gyümölcslé adja.
A három gyümölcslé elegyítésével nyert K_3 koktél összes V_2 vitamintartalma: $2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$, képlettel felírva:

$$c_{23} = a_{13} \cdot b_{12} + a_{23} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32}.$$

Vegyük jobban szemügyre az utóbbi képletet, azt tapasztaljuk, hogy a **C** mátrix c_{23} elemét úgy kapjuk, hogy az **A** mátrix 3. **oszlopvektorát** kell megszorozni skalárisan a **B** mátrix 2. **oszlopvektorával**. Az **XY** mátrixszorzás művelet definíciója szerint az eredménymátrix ij elemét úgy kapjuk, hogy az első helyen álló mátrix (**X**) i-edik **sorvektorát** skalárisan szorozzuk a második helyen álló mátrix (**Y**) j-edik **oszlopvektorával**. Azt látjuk, hogy a mi esetünkben is **két vektor** (két oszlopvektor) **skaláris szorzata** adja az eredménymátrix elemeit, tehát két mátrix szorzatáról van szó esetünkben is. Azt kell megtalálni, hogy melyik két mátrix szorzata kell és azokat milyen sorrendben kell összeszorozni.

Két lehetőség van:
Ha a **B** mátrixot transzponáljuk, akkor a $\mathbf{B}^T$ mátrix 2. **sorvektorát** kell szorozni az **A** mátrix 3. **oszlopvektorával**, tehát a keresett mátrixművelet $\mathbf{B}^T\mathbf{A}$.
Ha az **A** mátrixot transzponáljuk, akkor a $\mathbf{A}^T$ mátrix 3. **sorvektorát** kell szorozni az **B** mátrix 2. **oszlopvektorával**, tehát a keresett mátrixművelet $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$.
Mindkét esetben megkapjuk a koktélok vitamintartalmát. Azonban csak a $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}$ megoldás a helyes, mert azt a **C** mátrixot kerestük, amelynek oszlopai a koktélokat, sorai pedig a vitaminokat reprezeltálják.
A keresett mátrix:

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 7 \\ 3 & 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$ mátrixművelet esetén az eredménymátrix oszlopai a vitaminokat, sorai pedig a koktélokat reprezeltálják. Könnyen ellenőrizhető, hogy a kétféle módon kapott mátrix egymásnak transzponáltjai.

A megoldást célszerű az alábbi sémában szemléltetni. A művelet megállapítása is szemléletesebbé válik.

						K_1	K_2	K_3	K_4	
					G_1	1	2	**2**	2	
					G_2	0	3	**0**	1	← **A**
					G_3	2	0	**1**	1	
		G_1	G_2	G_3						
	V_1	2	1	1		4	7	5	6	
	V_2	**1**	**1**	**2**		5	5	**4**	5	
$\mathbf{B}^T \rightarrow$	V_3	0	1	2		4	3	2	3	← $\mathbf{C}=\mathbf{B}^T\mathbf{A}$
	V_4	3	0	1		5	6	7	7	
	V_5	1	2	1		3	8	3	5	

A fenti eredményhez az alábbi két módszerrel is eljuthatunk.

Jelölje a keresett **C** mátrix j-edik **oszlopvektorát** $\mathbf{c}_j$, amely a K_j koktél vitamintartalmát mutatja. A G_1 gyümölcslé vitamintartalmát a **B** mátrix $\mathbf{b}^{(1)}$ sorvektora mutatja. A K_j koktélhoz a G_1 gyümölcsléből a_{1j} mennyiség kell, így a K_j vitamintartalma a G_1 gyümölcsléből $a_{1j}\cdot\mathbf{b}^{(1)}$. A K_j koktélnak a másik két gyümölcsléből adódó vitamintartalma is hasonlóan számítható. A K_j vitamintartalmát tehát az

$$a_{1j}\cdot\mathbf{b}^{(1)} + a_{2j}\cdot\mathbf{b}^{(2)} + a_{3j}\cdot\mathbf{b}^{(3)}$$

összefüggés adja, amely nem más, mint a **B** mátrix **sorvektorainak** az **A** mátrix j-edik **oszlopvektorbeli** elemeire vett lineáris kombinációja. Ismeretes, hogy az **XY** mátrixszorzás eredményének j-edik **oszlopvektora** az **X** mátrix **oszlopvektorainak** az **Y** mátrix j-edik **oszlopvektorbeli** elemeire vett lineáris kombinációja. Esetünkben is lineáris kombinációról van szó, csak azt kell megállapítani, hogy mi az **X**, **Y** mátrix. Esetünkben a lineáris kombináció vektorai a $\mathbf{B}$ mátrix **sorvektorai**, ezek szerint $\mathbf{X}=\mathbf{B}^T$. A lineáris kombináció számai az $\mathbf{A}$ mátrix j-edik **oszlopvektorbeli** elemei, ezért $\mathbf{Y}=\mathbf{A}$. A keresett $\mathbf{c}_j$ oszlopvektor a $\mathbf{B}^T\mathbf{A}$ szorzatmátrix oszlopvektora, tehát a keresett megoldás $\mathbf{C}=\mathbf{B}^T\mathbf{A}$.

A másik módszernél jelölje a keresett $\mathbf{C}$ mátrix i-edik **sorvektorát** $\mathbf{c}^{(i)}$, amely az egyes koktéloknak a V_i típusú vitamintartalmát mutatja. A G_1 gyümölcsléből az egyes koktélokhoz szükséges mennyiséget az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{a}^{(1)}$ sorvektora adja. A G_1 gyümölcslében b_{i1} mennyiségű V_i típusú vitamin van, így a koktélokban a G_1 gyümölcsléből származó V_i típusú vitamintartalom $b_{i1}\cdot\mathbf{a}^{(1)}$. Hasonlóan számítható a koktéloknak a másik két gyümölcslé által átadott V_i típusú vitamintartalma. A koktélokban az összes gyümölcslé által áttadott V_i típusú vitamintartalmat a

$$b_{1i}\cdot\mathbf{a}^{(1)} + b_{2i}\cdot\mathbf{a}^{(2)} + b_{3i}\cdot\mathbf{a}^{(3)}$$

összefüggés adja, amely nem más, mint az $\mathbf{A}$ mátrix **sorvektorainak** a $\mathbf{B}$ mátrix i-edik **oszlopvektorbeli** elemeire vett lineáris kombinációja. Ismeretes, hogy az $\mathbf{XY}$ mátrixszorzás eredményének i-edik **sorvektora** az $\mathbf{Y}$ mátrix **sorvektorainak** az $\mathbf{X}$ mátrix i-edik **sorvektorbeli** elemeire vett lineáris kombinációja. Esetünkben is lineáris kombinációról van szó, csak azt kell megállapítani, hogy mi az $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ mátrix. Esetünkben a lineáris kombináció vektorai az $\mathbf{A}$ mátrix **sorvektorai**, ezek szerint $\mathbf{Y}=\mathbf{A}$. A lineáris kombináció számai a $\mathbf{B}$ mátrix i-edik **oszlopvektorbeli** elemei, ezért $\mathbf{X}=\mathbf{B}^T$. A keresett $\mathbf{c}^{(i)}$ sorvektor a $\mathbf{B}^T\mathbf{A}$ szorzatmátrix sorvektora, tehát a keresett megoldás $\mathbf{C}=\mathbf{B}^T\mathbf{A}$.

A háromféle megoldási mód közül az olvasónak kell megitélnie, hogy melyik áll közelebb a gondolkodásmódjához. A mátrixműveletek biztos ismerete nélkül azonban nem lehet megtalálni a helyes megoldást.

Válasz a 3. kérdésre:

Mennyi pénzből tudjuk előállítani a v vektornak megfelelő mennyiségben készült koktélokat? Az árnál csak a gyümölcslevek árát vegyük figyelembe!

Az 1. kérdésben megadtuk a választ arra, hogy egységnyi mennyiségű koktéloknak mennyi az ára, ezt a $\mathbf{pA}$=(13, 16, 14, 16) művelet adta. A $\mathbf{v}$=(30, 20, 40, 10) vektornak megfelelő mennyiségű koktélok árát egyszerű számolással kapjuk:

$$v_1\cdot 13 + v_2\cdot 16 + v_3\cdot 14 + v_4\cdot 16 = 1430,$$

amely a $\mathbf{v}(\mathbf{pA})$ vagy $(\mathbf{pA})\mathbf{v}$ skaláris szorzással adható meg.

Ha azt akarjuk megtudni, hogy koktélonként mennyibe került az előállítás, akkor a megoldás $(\mathbf{pA})\mathbf{V}$ vagy $(\mathbf{pA})\langle\mathbf{v}\rangle$, ahol $\mathbf{V}$ a $\mathbf{v}$ vektorból alkotott diagonális mátrix.

$$(\mathbf{pA}) < \mathbf{v} >= [13 \quad 16 \quad 14 \quad 16] < 30 \quad 20 \quad 40 \quad 10 >= [390 \quad 320 \quad 560 \quad 160].$$

Válasz a 4. kérdésre:

Van-e a K_2 koktélban a d vektor által előírt vitamin mennyiség?

A 2. kérdésnél meghatároztuk, hogy az egyes koktélok az egyes vitaminokból mennyit tartalmaznak. A K_2 koktél vitamintartamát a $\mathbf{B}^T\mathbf{A}$ mátrix 2. **oszlopvektora** mutatja, amely mátrixművelettel leírva $(\mathbf{B}^T\mathbf{A})\mathbf{e}_2$. Azt kell tehát ellenőrizni, hogy fennáll-e a $(\mathbf{B}^T\mathbf{A})\mathbf{e}_2 \geq \mathbf{d}$ egyenlőtlenség. Mivel $(\mathbf{B}^T\mathbf{A})\mathbf{e}_2 = (7, \mathbf{5}, 3, 6, 8)$ és $\mathbf{d} = (5, \mathbf{6}, 3, 5, 7)$ ebből látható, hogy a 2. vektorelemekre nem áll fenn az előírás, így a koktél nem elfogadható a vitamintartalom szempontjából.

Válasz az 5. kérdésre:
Mennyi koktél állítható elő a q mennyiségben vásárolt gyümölcslevekből?

Jelölje x_j a j-edik koktélból előállított mennyiséget, foglaljuk ezeket az **x** vektorba.

A j-edik koktél egységnyi mennyiségéhez az egyes gyümölcslevekből szükséges mennyiséget az **A** mátrix $\mathbf{a}_j$ **oszlopvektora** adja, ha ezt megszorozzuk x_j-vel, akkor szintén a j-edik koktélhoz szükséges gyümölcslé mennyiségeket kapjuk, csak nem egységnyi, hanem x_j mennyiséghez. Hasonlóan kapjuk a többi koktél esetében is a mennyiségeket. A négy koktélhoz szükséges mennyiséget a gyümölcslevekből az

$$x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + x_2 \cdot \mathbf{a}_2 + x_3 \cdot \mathbf{a}_3 + x_4 \cdot \mathbf{a}_4$$

adja, amely az **oszlopvektorok** lineáris kombinációja, ez pedig az **Ax** mátrixszorzásnak felel meg.
Másképpen gondolkodva: Az egyes koktélok egységnyi mennyiségű előállításához szükséges G_i gyümölcslé tartalmat az $\mathbf{a}^{(i)}$ **sorvektor** mutatja, ha ennek elemeit rendre az egyes koktélok mennyiségével beszorozzuk és a szorzatokat összeadjuk, akkor a G_i gyümölcsléből szükséges mennyiséget kapjuk meg, amely képletben $\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{x}$ skaláris szorzat. A többi gyümölcslére is hasonló a számítás, azaz az $\mathbf{a}^{(i)}$ sorvektorok és az **x** vektor skaláris szorzatát kell venni, ez pedig az **Ax** mátrixszorzásnak felel meg.
Tehát az **Ax** mennyiségnek kell egyenlőnek lenni az előírt **q** mennyiséggel, azaz

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{q}\,,$$

részletezve

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Ez a **x** ismeretlen vektorra nézve egy **lineáris egyenletrendszer mátrixos** felírásban, ennek megoldása adja, hogy mennyi koktélt tudunk előállítani a megvásárolt gyümölcslevekből.

A lineáris egyenletrendszer **vektoros** felírását a lineáris kombináció adja, azaz

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

A lineáris egyenletrendszer **skaláris** felírását a skalárszorzatok adják, azaz

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 50 \\ 0x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 1x_4 &= 30\,. \\ 2x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 &= 20 \end{aligned}$$

A megoldás sémája:

$$\begin{array}{cccc}
 & & \boxed{\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}} & \leftarrow \mathbf{x} \\
 & & \begin{array}{cccc} \mathrm{K}_1 & \mathrm{K}_2 & \mathrm{K}_3 & \mathrm{K}_4 \end{array} & \\
\mathbf{q} \rightarrow & \boxed{\begin{array}{c} 50 \\ 30 \\ 20 \end{array}} \; \begin{array}{c} \mathrm{G}_1 \\ \mathrm{G}_2 \\ \mathrm{G}_3 \end{array} & \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}} & \leftarrow \mathbf{A}
\end{array}$$

A lineáris egyenletrendszer megoldásával itt nem foglalkozunk. A megoldási módszerekről a későbbiekben fogunk írni, de csak érintőlegesen, hiszen e segédletnek ez nem volt célja. Annyit megjegyzünk, hogy ez ráadásul különleges lineáris egyenletrendszer, mivel az ismeretlenek száma nem azonos az egyenletek számával. Általában végtelen sok megoldása van egy ilyen lineáris egyenletrendszernek.

Tegyük fel, hogy a koktélok eladási ára rendre 60, 40, 50, 30; foglaljuk ezeket a **c**=(60, 40, 50, 30) árvektorba. Ha minden előállított koktélt el tudjuk adni a fentebbi árakon, akkor az árbevételt a **cx** skaláris szorzat adja. Érdekességként felvetjük azt a problémát is, hogy a végtelen sok megoldás közül válasszuk ki azt, amelynél a koktélok eladásából adódó árbevétel a legnagyobb. Ezt az alábbi formában fogalmazhatjuk meg:
Keressük azt az **x** vektort, amelyre teljesülnek az

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{q}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

feltételek és

$$\mathbf{cx} \rightarrow \max!$$

Ez egy optimalizálási feladat, azon belül egy lineáris programozási feladat, amelynek megoldására itt szintén nem tudunk kitérni.

<u>**Példa**</u>:
Egy üzem 3 féle termék (T) előállításával foglalkozik. A termékeket 3 féle alkatrészből (A) szerelik össze. Az alábbi baloldali táblázat mutatja, hogy az egyes termékeket hány alkatrészből szerelik össze. Az alkatrészek megmunkálását 3 féle megmunkálógépen (G) végzik. Az alábbi jobboldali táblázat mutatja, hogy az egyes alkatrészeket mennyi idő (óra) alatt munkálják meg az egyes gépeken. Szintén az alábbi táblázatokban van megadva, hogy az egyes termékekből mennyit gyártunk (megrendelés) (gy.m.) egy adott időszakban, mennyi az egyes termékek szerelési költsége (sz.k.), mennyi az egyes alkatrészek ára (a.ár), illetve mennyi az egyes gépek egy órai működési költsége (m.k.).

	T_1	T_2	T_3	a.ár
A_1	1	3	0	5
A_2	0	1	1	2
A_3	2	2	3	3
gy.m.	10	20	40	
sz.k.	6	5	3	

	A_1	A_2	A_3	m.k.
G_1	1	0	4	10
G_2	2	1	0	30
G_3	4	3	2	20

Mátrixalgebrai jelölésekkel fogalmazza meg az alábbi kérdéseket!

1. Mekkora az egyes termékek alkatrész költsége?
2. Az egyes alkatrészekből mennyit használunk fel a megrendelés teljesítéséhez?
3. Mennyi az egyes alkatrészek megmunkálási költsége?
4. Az egyes megmunkálógépeken hány órát kell dolgozni egy-egy termékhez szükséges alkatrészek legyártásához?
5. Az egyes megmunkálógépeknek hány órát kell dolgozniuk a megrendelés teljesítéséhez?
6. Egy-egy termékhez szükséges alkatrészek legyártásához mennyi a megmunkáló-gépek működési költsége?

7. A megrendelés teljesítésének mekkora az összes költsége?

A kérdések megválaszolásához először meg kell adni a feladatban használt mátrixokat és vektorokat.
Jelölje a_{ij} azt, hogy a j-edik termék összeszereléséhez az i-edik alkatrészből hány darabra van szükség. Ezeket az adatokat az **A** mátrixba foglaljuk. Az **A** mátrix $\mathbf{a}^{(i)}$ sorvektora az i-edik alkatrészből az egyes termékek szereléséhez szükséges mennyiséget, az $\mathbf{a}_j$ oszlopvektora pedig a j-edik termék szereléséhez szükséges egyes alkatrészek mennyiségét mutatja.
A b_{ij} jelentse azt, hogy a j-edik alkatrész i-edik gépen történő megmunkálásához mennyi időre (óra) van szükség. Ezeket az adatokat a **B** mátrixba foglaljuk. A **B** mátrix $\mathbf{b}^{(i)}$ sorvektora az i-edik gépnek az egyes alkatrészek megmunkálásához szükséges gépidejét, $\mathbf{b}_j$ oszlopvektora a j-edik alkatrész az egyes gépeken történő megmunkálásának időszükségletét mutatja.

Jelölje q_i az i-edik termékből gyártandó mennyiséget (megrendelés) (gy.m.), amelyeket a **q** vektorba foglalunk.

A k_i jelentse az i-edik megmunkálógép egy órai működési költségét (m.k.) , amelyeket a **k** vektorba foglalunk.

Az s_i jelentse az i-edik termék összeszerelési költségét (sz.k.), amelyeket az **s** vektorba foglalunk.

A p_i jelentse az i-edik alkatrész egységárát (a.ár), amelyeket a **p** vektorba foglalunk.

A példabeli mátrixok és vektorok a következők:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&1\\2&2&3\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&4\\2&1&0\\4&3&2\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}=\begin{bmatrix}10\\20\\40\end{bmatrix},\quad \mathbf{k}=\begin{bmatrix}10\\30\\20\end{bmatrix},\quad \mathbf{s}=\begin{bmatrix}6\\5\\3\end{bmatrix},\quad \mathbf{p}=\begin{bmatrix}5\\2\\3\end{bmatrix}.$$

1. Mekkora az egyes termékek alkatrész költsége?
Az **A** mátrix $\mathbf{a}^{(i)}$ sorvektora az egyes termékek szereléséhez szükséges mennyiséget adja az i-edik alkatrészből. Az i-edik alkatrész ára p_i, így a $p_i{\cdot}\mathbf{a}^{(i)}$ az egyes termékek szereléséhez szükséges A_i alkatrész költsége. Ezeket mindhárom alkatrészre összeadva a

$$p_1\cdot\mathbf{a}^{(1)}+p_2\cdot\mathbf{a}^{(2)}+p_3\cdot\mathbf{a}^{(3)}$$

összefüggés adja az egyes termékekhez szükséges alkatrészek költségét. Ez az **A** mátrix **sorvektorainak** lineáris kombinációja, amiről tudjuk, hogy a **pA** vektor-mátrix **balról** szorzásnak felel meg.
Másik elgondolás szerint:
Az **A** mátrix $\mathbf{a}_j$ oszlopvektora a T_j termékhez szükséges alkatrészmennyiségeket adja, ha e vektor elemeit rendre megszorozzuk az alkatrész árakkal és a szorzatokat összeadjuk, akkor a T_j termékhez szükséges alkatrészek költségét kapjuk. Ez a $\mathbf{pa}_j$ skaláris szorzásnak felel meg. A többi termék alkatrészköltségét is hasonlóan számítjuk, így a keresett mátrixművelet a **pA**.

A megoldás mátrixműveletek segítségével:

$$\mathbf{pA} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 23 & 11 \end{bmatrix}.$$

Séma segítségével való számolás:

$$\begin{array}{cccc} & & & \begin{array}{ccc} T_1 & T_2 & T_3 \end{array} & \\ \mathbf{p} \rightarrow & \boxed{\begin{array}{c} 5 \\ 3 \\ 2 \end{array}} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}} & \leftarrow \mathbf{A} \\ & & & & \\ & & & \boxed{\begin{array}{ccc} 11 & 23 & 11 \end{array}} & \leftarrow \mathbf{pA} \end{array}$$

2. Az egyes alkatrészekből mennyit használunk fel a megrendelés teljesítéséhez?

A T_j termék egységéhez szükséges alkatrészmennyiséget alkatrészenként az **A** mátrix j-edik oszlopvektora ($\mathbf{a}_j$) mutatja, q_j mennyiségű T_j termékhez pedig az alkatrészszükséglet $q_j \cdot \mathbf{a}_j$. A három termékre vonatkozóan az alkatrészenkénti alkatrészszükséglet

$$q_1 \cdot \mathbf{a}_1 + q_2 \cdot \mathbf{a}_2 + q_3 \cdot \mathbf{a}_3 .$$

Ez az **A** mátrix **oszlopvektorainak** a megrendelés vektor (**q**) elemeire vett lineáris kombináció, ami az **Aq** mátrixműveletnek felel meg.

Másik elgondolás szerint:

Az A_i alkatrészből egységnyi mennyiségű termékekhez a felhasználást az $\mathbf{a}^{(i)}$ sorvektor mutatja. A $\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}^{(i)}$ skaláris szorzat pedig a **q** vektornak megfelelő mennyiségű termékhez mutatja az A_i alkatrészből a felhasználást. A többi alkatrészre is hasonló a felhasználás, így az egyes alkatrészekből a felhasználást az **Aq** művelet eredménye adja.

A megoldás mátrixműveletek segítségével:

$$\mathbf{Aq} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 60 \\ 180 \end{bmatrix}.$$

Séma segítségével való számolás:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{q} \rightarrow & & \boxed{\begin{array}{ccc} 10 & 20 & 40 \end{array}} & & \\ & & \begin{array}{ccc} T_1 & T_2 & T_3 \end{array} & & \\ \mathbf{A} \rightarrow & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} 70 \\ 60 \\ 180 \end{array}} & \leftarrow \mathbf{Aq} \end{array}$$

3. Mennyi az egyes alkatrészek megmunkálási költsége

A **B** mátrix $\mathbf{b}^{(i)}$ sorvektora az egyes alkatrészeknek az i-edik gépen történő megmunkálásának idejét mutatja. Az i-edik gép óránkénti működési költsége k_i, így a $k_i \cdot \mathbf{b}^{(i)}$ az egyes alkatrészek megmunkálási költsége a G_i gépen. Ezeket mindhárom gépre összeadva a

$$k_1 \cdot \mathbf{b}^{(1)} + k_2 \cdot \mathbf{b}^{(2)} + k_3 \cdot \mathbf{b}^{(3)}$$

összefüggés adja az egyes alkatrészek megmunkálási költségét. Ez a **B** mátrix **sorvektorainak** lineáris kombinációja, amiről tudjuk, hogy a **kB** vektor-mátrix **balról** szorzásnak felel meg.

Másik elgondolás szerint:

A **B** mátrix $\mathbf{b}_j$ oszlopvektora az A_j alkatrész gépenkénti megmunkálási idejét mutatja. Ha e vektor elemeit rendre megszorozzuk a gépek óránkénti működési költségével és a szorzatokat összeadjuk, akkor az A_j alkatrész megmunkálási költségét kapjuk. Ez a $\mathbf{kb}_j$ skaláris szorzásnak felel meg. A többi alkatrész megmunkálási költségét is hasonlóan számítjuk, így a keresett mátrixművelet a **kB**.

A megoldás mátrixműveletek segítségével:

$$\mathbf{kB} = \begin{bmatrix} 10 & 30 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & 90 & 80 \end{bmatrix}.$$

Séma segítségével való számolás:

			A_1	A_2	A_3	
	10	G_1	1	0	4	
$\mathbf{k} \rightarrow$	30	G_2	2	1	0	$\leftarrow \mathbf{B}$
	20	G_3	4	3	2	
			150	90	80	$\leftarrow \mathbf{kB}$

4. Az egyes megmunkálógépeken hány órát kell dolgozni egy-egy termékhez szükséges összes alkatrész legyártásához?

Azt a **táblázatot** keressük, amely azt mutatja, hogy az egyes termékekhez szükséges alkatrészek legyártásához mennyi ideig kell működtetni az egyes gépeket. **Mátrixos** megfogalmazással, azt a **C mátrixot** keressük, amelynek c_{ij} eleme megmutatja, hogy a j-edik termékhez (T_j) szükséges alkatrészek megmunkálásához az i-edik gépen (G_i) mennyi idő kell. A **C** mátrix c_{ij} elemének meghatározása a következőképpen történhet:

A T_j termékhez az A_1 alkatrészekből a_{1j} mennyiség kell, egy A_1 alkatrész megmunkálása a G_i gépen b_{i1} ideig tart, akkor a_{1j} mennyiség megmunkálása $a_{1j} \cdot b_{i1}$ ideig tart. A T_j termékhez az A_2 alkatrészekből a_{2j} mennyiség kell, egy A_2 alkatrész megmunkálása a G_i gépen b_{i2} ideig tart, akkor a_{2j} mennyiség megmunkálása $a_{2j} \cdot b_{i2}$ ideig tart. Hasonlóan adható meg az A_3 alkatrész megmunkálásához szükséges idő is. Eszerint a T_j termékhez szükséges alkatrészek megmunkálása a G_i gépen

$$a_{1j} \cdot b_{i1} + a_{2j} \cdot b_{i2} + a_{3j} \cdot b_{i3}$$

ideig tart. Könnyen kiolvasható, hogy ez a mennyiség a **B** mátrix i-edik **sorvektorának** ($\mathbf{b}^{(i)}$) és az **A** mátrix j-edik **oszlopvektorának** ($\mathbf{a}_j$) a skaláris szorzata. A mátrixszorzás műveletének definíciójából azonnal adódik, hogy a **C** mátrix a **B** és az **A** mátrix szorzata, képletben:

$$\mathbf{C} = \mathbf{BA}.$$

A megoldás mátrixműveletek segítségével:

$$\mathbf{C} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 12 \\ 2 & 7 & 1 \\ 8 & 19 & 9 \end{bmatrix}.$$

Séma segítségével való számolás:

$$\begin{array}{cc|ccc|c|ccc|c}
 & & & & & & \mathrm{T}_1 & \mathrm{T}_2 & \mathrm{T}_4 & \\
\cline{7-9}
 & & & & & \mathrm{A}_1 & \multicolumn{1}{|c}{1} & 3 & \multicolumn{1}{c|}{0} & \\
 & & & & & \mathrm{A}_2 & \multicolumn{1}{|c}{0} & 1 & \multicolumn{1}{c|}{1} & \leftarrow \mathbf{A} \\
 & & & & & \mathrm{A}_3 & \multicolumn{1}{|c}{2} & 2 & \multicolumn{1}{c|}{3} & \\
\cline{7-9}
 & & \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_3 & & & & & \\
\cline{3-5}\cline{7-9}
 & \mathrm{G}_1 & 1 & 0 & 4 & & \multicolumn{1}{|c}{9} & 11 & \multicolumn{1}{c|}{12} & \\
\mathbf{B} \rightarrow & \mathrm{G}_2 & 2 & 1 & 0 & & \multicolumn{1}{|c}{2} & 7 & \multicolumn{1}{c|}{1} & \\
 & \mathrm{G}_3 & 4 & 3 & 2 & & \multicolumn{1}{|c}{8} & 19 & \multicolumn{1}{c|}{9} & \leftarrow \mathbf{BA} \\
\cline{3-5}\cline{7-9}
\end{array}$$

Ugyanehhez az eredményhez más úton is eljuthatunk.

Jelölje a keresett **C** mátrix j-edik **oszlopvektorát** $\mathbf{c}_j$, amely a T_j termékhez felhasználandó alkatrészek megmunkálásához szükséges gépidőt mutatja gépenként. Az A_1 alkatrész gépenkénti megmunkálási idejét a **B** mátrix $\mathbf{b}_1$ oszlopvektora mutatja. Az A_1 alkatrészből a T_j termékhez a_{1j} mennyiség kell, így a T_j termékhez szükséges A_1 alkatrész gépenkénti megmunkálási idejét az $a_{1j}\cdot\mathbf{b}_1$ mennyiség adja. Hasonlóan számítható a másik két alkatrészre vonatkozóan is a T_j termékhez szükséges gépenkénti gépidő. A három alkatrészt együttesen nézve a T_j termékhez szükséges gépenkénti gépidőt az

$$a_{1j}\cdot\mathbf{b}_1 + a_{2j}\cdot\mathbf{b}_3 + a_{3j}\cdot\mathbf{b}_3$$

összefüggés adja, amely nem más, mint a **B** mátrix **oszlopvektorainak** az **A** mátrix j-edik **oszlopvektorbeli** elemeire vett lineáris kombinációja. Ismeretes, hogy az **XY** mátrixszorzás eredményének j-edik **oszlopvektora** az **X** mátrix **oszlopvektorainak** az **Y** mátrix j-edik **oszlopvektorbeli** elemeire vett lineáris kombinációja. Esetünkben a lineáris kombináció vektorai a **B** mátrix **oszlopvektorai**, ezek szerint **X**=**B**. A lineáris kombináció számai az **A** mátrix j-edik **oszlopvektorbeli** elemei, ezért **Y**=**A**. A keresett $\mathbf{c}_j$ oszlopvektor a **BA** szorzatmátrix oszlopvektora, tehát a keresett megoldás: **C**=**BA**.

A másik módszernél jelölje a keresett **C** mátrix i-edik **sorvektorát** $\mathbf{c}^{(i)}$, amely az egyes termékekhez szükséges alkatrészeknek a G_i gépen történő megmunkálási idejét adja. Az A_1 alkatrészből az egyes termékekhez szükséges mennyiséget az **A** mátrix $\mathbf{a}^{(1)}$ sorvektora adja. Az A_1 alkatrészt a G_i gépen b_{i1} idő alatt lehet megmunkálni. A $b_{i1}\cdot\mathbf{a}^{(1)}$ mennyiség az egyes termékekhez szükséges A_1 alkatrész G_i gépen történő megmunkálási idejét adja. Hasonlóan számítható a másik két alkatrész G_i gépen történő megmunkálási ideje is. Az egyes termékekhez szükséges három alkatrésznek a G_i gépen történő megmunkálási idejét a

$$b_{i1}\cdot\mathbf{a}^{(1)} + b_{i2}\cdot\mathbf{a}^{(2)} + b_{i3}\cdot\mathbf{a}^{(3)}$$

összeg adja, amely nem más, mint az **A** mátrix **sorvektorainak** a **B** mátrix i-edik **sorvektorbeli** elemeire vett lineáris kombinációja. Ismeretes, hogy az **XY** mátrixszorzás eredményének i-edik **sorvektora** az **Y** mátrix **sorvektorainak** az **X** mátrix i-edik **sorvektorbeli** elemeire vett lineáris kombinációja. Esetünkben a lineáris kombináció vektorai az **A** mátrix **sorvektorai**, ezek szerint **Y**=**A**. A lineáris kombináció számai a **B** mátrix i-edik **sorvektorbeli** elemei, ezért **X**=**B**. A keresett $\mathbf{c}^{(i)}$ sorvektor a **BA** szorzatmátrix sorvektora, tehát a keresett megoldás: **C**=**BA**.

5. Az egyes megmunkálógépeknek hány órát kell dolgozniuk a megrendelés teljesítéséhez?

A **C**=**BA** mátrix $\mathbf{c}_j$ **oszlopvektora** a T_j termékhez felhasználandó alkatrészek megmunkálásához szükséges gépidőt mutatja gépenként. A T_j termékből q_j mennyiséget gyártunk, így az ehhez szükséges alkatrészek megmunkálási ideje gépenként $q_j \cdot \mathbf{c}_j$. A többi termékre vonatkozóan hasonlóan írható a megmunkálási idő, ezért a

$$q_1 \cdot \mathbf{c}_1 + q_2 \cdot \mathbf{c}_2 + q_3 \cdot \mathbf{c}_3$$

mennyiség a megrendelés teljesítéséhez szükséges gépenkénti gépóra. Ez a **C** mátrix **oszlopvektorainak** a megrendelés vektor (**q**) elemeire vett lineáris kombinációja, ami a **Cq** mátrixműveletnek felel meg. Más felírásban (**BA**)**q**.

A megoldás mátrixműveletek segítségével:

$$\mathbf{Cq} = (\mathbf{BA})\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 12 \\ 2 & 7 & 1 \\ 8 & 19 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 790 \\ 200 \\ 820 \end{bmatrix}.$$

Séma segítségével való számolás:

q →		10	20	40		
		T_1	T_2	T_3		
	G_1	9	11	12	790	
C=**BA** →	G_2	2	7	1	200	← **Cq**=(**BA**)**q**
	G_3	8	19	9	820	

A mátrixszorzás associatív tulajdonsága miatt **B**(**Aq**) is ugyanezt az eredményt szolgáltatja. Természetesen ez is értelmezhető, az **Aq** mennyiség már ismert is az előző kérdésből. Javasoljuk az olvasónak, hogy az **Aq** ismeretében is vezesse le a **B**(**Aq**) megoldást.

Séma segítségével való számolás:

Aq →		70	60	180		
		T_1	T_2	T_3		
	G_1	1	0	4	790	
B →	G_2	2	1	0	200	← **B**(**Aq**)
	G_3	4	3	2	820	

6. Egy-egy termékhez szükséges alkatrészek legyártásához mennyi a megmunkálógépek működési költsége?

A **C**=**BA** mátrix $\mathbf{c}^{(i)}$ **sorvektora** a G_i gép megmunkálási idejét mutatja termékenként. A G_i gép működési költsége k_i, így a $k_i \cdot \mathbf{c}^{(i)}$ a G_i gép működési költségét fejezi ki termékenként. Ha mindhárom gépet figyelembe vesszük, akkor a

$$k_1 \cdot \mathbf{c}^{(1)} + k_2 \cdot \mathbf{c}^{(2)} + k_3 \cdot \mathbf{c}^{(3)}$$

összeg fejezi ki, hogy az egyes termékekhez szükséges alkatrészek legyártásához mennyi a gépek működési kötsége. Ez a **C** mátrix **sorvektorainak** a működési költség vektor (**k**) elemeire vett lineáris kombinációja, ami a **kC** mátrixműveletnek felel meg. Más felírásban **k**(**BA**).

A megoldás mátrixműveletek segítségével:

$$\mathbf{kC} = \mathbf{k}(\mathbf{BA}) = \begin{bmatrix} 10 & 30 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 12 \\ 2 & 7 & 1 \\ 8 & 19 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 310 & 700 & 330 \end{bmatrix}.$$

Séma segítségével való számolás:

			T_1	T_2	T_3	
	10	G_1	9	11	12	
$\mathbf{k} \rightarrow$	30	G_2	2	7	1	$\leftarrow$ **BA**
	20	G_3	8	19	9	
			310	700	330	$\leftarrow$ **k**(**BA**)

A mátrixszorzás associatív tulajdonsága miatt (**kB**)**A** is ugyanezt az eredményt szolgáltatja. A **kB** is könnyen értelmezhető, mégpedig a gépek működési költségét fejezi ki alkatrészenként. Javasoljuk az olvasónak, hogy a **kB** ismeretében is vezesse le a (**kB**)**A** megoldást.

Séma segítségével való számolás:

			T_1	T_2	T_3	
	150	G_1	1	3	0	
$\mathbf{kB} \rightarrow$	90	G_2	0	1	1	$\leftarrow$ **A**
	80	G_3	2	2	3	
			310	700	330	$\leftarrow$ (**kB**)**A**

7. A megrendelés teljesítésének mekkora az összes költsége?

Legyen a **kC** vektor j-edik eleme $(\mathbf{kC})_j$, amely a T_j termékhez szükséges alkatrészek legyártásához a gépek működési költségét fejezi ki. A T_j termékből a megrendelés q_j, ehhez $q_j \cdot (\mathbf{kC})_j$ működési költség tartozik. Ezeket termékenként összeadva, megkapjuk a megrendelés teljesítéséhez a gépek működési költségét, amelyet a **kC** és a **q** vektor skaláris szorzata ad meg, tehát képletben (**kC**)**q** vagy (**k**(**BA**))**q**. A formula átrendezhető a (**kB**)(**Aq**) skaláris szorzat formára is. A **k**(**BA**)**q** formára való átrendezés is helyes. Javasoljuk az olvasónak a fenti felírások szerinti értelmezést.

Ne feledkezzünk meg, hogy nemcsak gépi megmunkálási költségek vannak, hanem alkatrészköltségek is. Az **Aq** vektor i-edik eleme $(\mathbf{Aq})_i$, amely az A_i alkatrészből a megrendeléshez szükséges mennyiség. Az A_i alkatrész ára p_i, így $p_i \cdot (\mathbf{Aq})_i$ a megrendelés A_i alkatrész költsége. Az összes alkatrész költség

$$p_1 \cdot (\mathbf{Aq})_1 + p_2 \cdot (\mathbf{Aq})_2 + p_3 \cdot (\mathbf{Aq})_3 .$$

Ez a **p** vektor és az **Aq** vektor skaláris szorzata, képletben

$$\mathbf{p}(\mathbf{Aq}),$$

amely felírható (**pA**)**q**, sőt **pAq** formában is.

Ezeken a költségeken felül még a termékek szerelési költségét is figyelembe kell venni. Ezt az

$$s_1 \cdot q_1 + s_2 \cdot q_2 + s_3 \cdot q_3$$

skaláris szorzás adja, amely vektoros felírásban **sq** vagy **qs**.

Összefoglalva, a három költséget az alábbi formula adja:

$$(\mathbf{k}(\mathbf{BA}))\mathbf{q} + \mathbf{p}(\mathbf{Aq}) + \mathbf{sq} .$$

A **q** vektor kiemelésével a fenti formula az alábbi skaláris szorzat formájában írható.

$$(\mathbf{kBA} + \mathbf{pA} + \mathbf{s})\mathbf{q} .$$

Ennek értelmezése az előzőek alapján egyszerű. A **kBA** vektor elemei az egyes termékekhez szükséges alkatrészek megmunkálási költségét, a **pA** vektor elemei az egyes termékekhez szükséges alkatrészek költségét, az **s** vektor elemei az egyes termékek szerelési költségét adják. Ha ezeket rendre a termékekből előállított mennyiségekkel szorozzuk és a szorzatokat összeadjuk, akkor a megrendelés összes költségét kapjuk.
E fenti értelmezés alapján a megoldás az alábbi:
A három költségvektor:

$$\mathbf{kBA} + \mathbf{pA} + \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 310 \\ 700 \\ 330 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ 23 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 327 \\ 728 \\ 344 \end{bmatrix}.$$

Ezt szorozva skalárisan a **q** vektorral kapjuk a megrendelés teljes költségét, amely 31 590.

Mivel a fenti formula viszonylag bonyolult, ezért felírjuk mátrixszorzatos írásmód szerint is

$$\mathbf{k}^T\mathbf{BAq} + \mathbf{p}^T\mathbf{Aq} + \mathbf{s}^T\mathbf{q} ,$$

vagy

$$(\mathbf{k}^T\mathbf{BA} + \mathbf{p}^T\mathbf{A} + \mathbf{s}^T)\mathbf{q} .$$

Példa:
Legyen adott az $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ mátrix. Jelöljük ki a mátrix egy nemzérus elemét, az a_{rs} elemet. Nevezzük ezt pivot elemnek. A mátrix r-edik sorát pivotsornak, az s-edik oszlopát pedig pivotoszlopnak.

1. A mátrixműveletek segítségével határozzuk meg azt a $\mathbf{B} \in R^{m \times n}$ mátrixot, amelyben a pivotsor és a pivotoszlop minden eleme zérus. A pivotsoron kívüli sorokat pedig úgy számoljuk, hogy az adott sorból kivonjuk a pivotsor valahányszorosát. Azt, hogy hányszorosát kell kivonni, a pivotoszlop két elemének hányadosa adja a következő képlet segítségével

$$\mathbf{b}^{(i)} = \mathbf{a}^{(i)} - \frac{a_{is}}{a_{rs}} \mathbf{a}^{(r)} \quad i \neq r .$$

2. Módosítsuk a **B** mátrixot egy $\mathbf{C}\in R^{m\times n}$ mátrixra úgy, hogy a pivotsor ne nullázódjon ki, hanem az eredeti **A** mátrix pivotsora legyen elosztva a pivotelemmel. A **C** mátrix meghatározását szintén mátrixműveletek segítségével végezzük.

Megoldás:

1. A **B** mátrix a **diadikus** szorzás használatával egyszerűen előállítható, mégpedig a pivotoszlop és a pivotsor diadikus szorzata segítségével az alábbiak szerint
$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \frac{1}{a_{rs}}\mathbf{a}_s\mathbf{a}^{(r)},$$
amely elemenkénti felírásban a következő
$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{1}{a_{rs}}a_{is}a_{rj}.$$
Ezt egyszerűen beláthatjuk, ha
   - ha $i = r$ (pivotsor), akkor: $b_{rj} = a_{rj} - \frac{1}{a_{rs}}a_{rs}a_{rj} = 0$,
   - ha $j = s$ (pivotoszlop), akkor: $b_{is} = a_{is} - \frac{1}{a_{rs}}a_{is}a_{rs} = 0$,
   - ha $i \neq r$ (nem pivotsor), akkor: $b_{ij} = a_{ij} - \frac{1}{a_{rs}}a_{is}a_{rj} = a_{ij} - \frac{a_{is}}{a_{rs}}a_{rj}$,

   amely vektoros formában $\mathbf{b}^{(i)} = \mathbf{a}^{(i)} - \frac{a_{is}}{a_{rs}}\mathbf{a}^{(r)} \quad i \neq r$, ez pedig a feladatban megfogalmazottal azonos eredményt ad.

2. A **C** mátrixot úgy kapjuk, hogy a **B** mátrixhoz hozzá kell adni egy olyan mátrixot, amelynek r-edik sora a pivotsor $\frac{1}{a_{rs}}$-szorosa, a többi sor pedig zérus. Ezt egy diagonális mátrix-szal való **balról** szorzással lehet elvégezni, legyen ez a $\mathbf{D}\in R^{m\times m}$ mátrix, amelynél $d_{rr} = \frac{1}{a_{rs}}$, a többi főátlóbeli elem pedig zérus. A hozzáadandó mátrix, így **DA**. A **C** mátrix pedig
$$\mathbf{C} = \mathbf{DA} + \mathbf{B} = \mathbf{DA} + \mathbf{A} - \frac{1}{a_{rs}}\mathbf{a}_s\mathbf{a}^{(r)} = (\mathbf{D}+\mathbf{E})\mathbf{A} - \frac{1}{a_{rs}}\mathbf{a}_s\mathbf{a}^{(r)},$$
ahol $\mathbf{E}\in R^{m\times m}$ egységmátrix, a **D**+**E** mátrix pedig olyan diagonális mátrix, amelynek főátlóbeli elemei 1, kivéve az r-ediket, amely $1+\frac{1}{a_{rs}}$.

Illusztrálás számpéldával:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad r = 2, \quad s = 3.$$
A pivotelem: $a_{23} = 2$, pivotsor: 2. sor, pivotoszlop: 3. oszlop.

Mátrixműveletek nélküli megoldás:

Az 1. sorból a pivotsor $\frac{6}{2}$-szeresét, a 3. sorból a pivotsor $\frac{-4}{2}$-szeresét kell kivonni.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 1 & 6 & 4\\ 1 & 4 & [2] & -3\\ 2 & 4 & -4 & 3\end{bmatrix}\rightarrow \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & -11 & 0 & 13\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 12 & 0 & -3\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & -11 & 0 & 13\\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 4 & 12 & 0 & -3\end{bmatrix}.$$

Mátrixmüveletek segítségével történő megoldás:

$$\mathbf{D}+\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1+\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}^{(2)}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2 & -3\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}6\\ 2\\ -4\end{bmatrix}.$$

A **B** és **C** mátrixok számításához kijelölt műveletek elvégzése:

$$(\mathbf{D}+\mathbf{E})\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 1 & 6 & 4\\ \frac{3}{2} & 6 & 3 & -\frac{9}{2}\\ 2 & 4 & -4 & 3\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_3\mathbf{a}^{(2)}=\begin{bmatrix}6\\ 2\\ -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 24 & 12 & -18\\ 2 & 8 & 4 & -6\\ -4 & -16 & -8 & 12\end{bmatrix}.$$

A keresett **B** és **C** mátrix:

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}-\frac{1}{2}\mathbf{a}_3\mathbf{a}^{(2)}=\begin{bmatrix}5 & 1 & 6 & 4\\ 1 & 4 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -4 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 12 & 6 & -9\\ 1 & 4 & 2 & -3\\ -2 & -8 & -4 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -11 & 0 & 13\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 12 & 0 & -3\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}=(\mathbf{D}+\mathbf{E})\mathbf{A}-\frac{1}{2}\mathbf{a}_3\mathbf{a}^{(2)}=\begin{bmatrix}5 & 1 & 6 & 4\\ \frac{3}{2} & 6 & 3 & -\frac{9}{2}\\ 2 & 4 & -4 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 12 & 6 & -9\\ 1 & 4 & 2 & -3\\ -2 & -8 & -4 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -11 & 0 & 13\\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 4 & 12 & 0 & -3\end{bmatrix}.$$

Példa:

Legyen adott az $\mathbf{A}\in R^{m\times n}$ mátrix. Módosítsuk az **A** mátrixot a következőképpen: a k-adik **oszlopából** vonjuk ki az s-edik ($s\neq k$) oszlopának λ-szorosát, a többi oszlopot hagyjuk változatlanul. Írjuk fel az így keletkező **B** mátrixot a mátrixműveletek segítségével!

Megoldás:

Készítsünk egy mátrixot, amelyet majd megszorzunk az **A** mátrix-szal megkapjuk a **B** mátrixot. Jelöljük ezt az $n\times n$-es mátrixot **G**-vel. A **G** mátrix megkonstruálásához induljunk ki az n-ed rendű egységmátrixból. Az egységmátrix k-adik **oszlopában** az s-edik elemet (zérust) változtassuk meg, legyen $g_{sk} = -\lambda$. Tehát a **G** mátrix k-adik **oszlopában** a k-adik elem 1, az s-edik elem $-\lambda$, a többi elem pedig zérus. Megmutatjuk, hogy a keresett **B** mátrix a **B**=**AG** művelettel számítható ki, tehát **jobbról** kell szorozni a **G** mátrix-szal.

A **B** mátrix oszlopszerinti felírása

$$\mathbf{B}=\mathbf{AG}=\begin{bmatrix}\mathbf{Ag}_1 & \mathbf{Ag}_2 & \cdots & \mathbf{Ag}_n\end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{g}_j$ oszlopvektorok a k-adik kivételével egységvektorok, így $j\neq k$ esetén $\mathbf{b}_j=\mathbf{Ag}_j=\mathbf{Ae}_j=\mathbf{a}_j$, tehát a k-adik oszlop kivételével a többi oszlop nem változik. A $\mathbf{b}_k=\mathbf{Ag}_k$ oszlopvektor a lineáris kombinációval felírva az alábbi

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{A}\mathbf{g}_k = 1 \cdot \mathbf{a}_k + (-\lambda) \cdot \mathbf{a}_s \,,$$

ez pedig pontosan annak felel meg, hogy a *k*-adik oszlopból kivonjuk az *s*-edik oszlop λ-szorosát.

Példa:
Legyen adott az $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ mátrix. Módosítsuk az **A** mátrixot a következőképpen: a *k*-adik **sorából** vonjuk ki az *r*-edik ($r \neq k$) sorának λ-szorosát, a többi sort hagyjuk változatlanul. Írjuk fel az így keletkező **B** mátrixot a mátrixműveletek segítségével!

Megoldás:
Készítsünk egy mátrixot, amelyet majd megszorzunk az **A** mátrix-szal megkapjuk a **B** mátrixot. Jelöljük ezt az $m \times m$-es mátrixot **G**-vel. A **G** mátrix megkonstruálásához induljunk ki az *m*-ed rendű egységmátrixból. Az egységmátrix *k*-adik **sorában** az *r*-edik elemet (zérust) változtassuk meg, legyen $g_{kr} = -\lambda$. Tehát a **G** mátrix *k*-adik **sorában** a *k*-adik elem 1, az *r*-edik elem $-\lambda$, a többi elem pedig zérus. Megmutatjuk, hogy a keresett **B** mátrix a **B**=**GA** művelettel számítható ki, tehát **balról** kell szorozni a **G** mátrix-szal.
A **B** mátrix sorszerinti felírása

$$\mathbf{B} = \mathbf{GA} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{(1)}\mathbf{A} \\ \mathbf{g}^{(2)}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{g}^{(m)}\mathbf{A} \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{g}^{(i)}$ sorvektorok a *k*-adik kivételével egységvektorok, így $i \neq k$ esetén $\mathbf{b}^{(i)} = \mathbf{g}^{(i)}\mathbf{A} = \mathbf{e}_i\mathbf{A} = \mathbf{a}^{(i)}$, tehát a *k*-adik sor kivételével a többi sor nem változik. A $\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)}\mathbf{A}$ sorvektor a lineáris kombinációval felírva az alábbi

$$\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)}\mathbf{A} = 1 \cdot \mathbf{a}^{(k)} + (-\lambda) \cdot \mathbf{a}^{(r)} \,,$$

ez pedig pontosan annak felel meg, hogy a *k*-adik sorból kivonjuk az *r*-edik sor λ-szorosát.

Példa:
Legyen adott az $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ mátrix. Az előző példához hasonlóan módosítsuk az **A** mátrixot a következőképpen: a *k*-adik **sorából** vonjuk ki az *r*-edik sorának ($r \neq k$) λ-szorosát, a többi sort hagyjuk változatlanul. Most azonban megmondjuk, hogy az *r*-edik sor hányszorosát vonjuk ki, annyiszorosát vonjuk ki, hogy a *k*-adik sor *s*-edik eleme zérus legyen. Írjuk fel az így keletkező **B** mátrixot a mátrixműveletek segítségével!

Megoldás:
Az előző példa megoldásából láttuk, hogy a sorkivonási feladat megoldását a **B**=**GA** művelet adja. Olyan λ számot kell választanunk, hogy $b_{ks}=0$ legyen. A b_{ks} elem pedig a

$$\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)}\mathbf{A} = 1 \cdot \mathbf{a}^{(k)} + (-\lambda) \cdot \mathbf{a}^{(r)}$$

kifejezésből egyszerűen meghatározható, hiszen $b_{ks} = a_{ks} - \lambda\, a_{rs}. = 0$, akkor ha a $\lambda = a_{ks} / a_{rs}$. Tehát λ-t az **A** mátrix *s*-edik **oszlopbeli** két elemének hányadosára kell választani úgy, hogy a számláló a *k*-adik sorból, a nevező pedig az *r*-edik sorból való.

<u>Példa</u>:
Legyen adott az $\mathbf{A}\in R^{m\times n}$ mátrix. Az előző példához hasonlóan módosítsuk az **A** mátrixot a következőképpen: a k-adik **sorából** vonjuk ki az r-edik ($r\neq k$) sorának λ_k-szorosát, de a többi sort ($i\neq k$) **ne hagyjuk** változatlanul, hanem azokban a sorokban is végezzük el ezt a kivonást, tehát **minden sorból** ($i\neq r$) vonjuk ki az r-edik sor λ_i-szeresét. Olyanok legyenek a kivonások, hogy minden sor ($i\neq r$) s-edik eleme zérus legyen. Ez azt jelenti, hogy az s-edik oszlop egy elem (r-edik) kivételével kinullázódik. Az r-edik sort eddig nem változtattuk, most változtassuk meg azt is, mégpedig úgy, hogy minden elemét osszuk el az a_{rs} elemmel.

<u>Megoldás</u>:
Az előző példa megoldásából láttuk, hogy a sorkivonási feladat megoldását a **B**=**GA** művelet adja. Olyan λ_i számokat kell választanunk, hogy b_{is}=0 legyen. Azt is láttuk, hogyan kell megválasztani a λ_i számokat, mégpedig a $\lambda_i = a_{is}/a_{rs}$ választással. Ezenfelül, még az r-edik sor minden elemét el kell osztani az a_{rs} elemmel. Ezt egy diagonális mátrix-szal való **balról** szorzással lehet megvalósítani, ahol az r-edik diagonális elem $1/a_{rs}$, a többi diagonális elem zérus. A fenti két feladat mindegyikét **balról** szorzással lehet megvalósítani.
Végezetül felírjuk a $\mathbf{G}\in R^{m\times m}$ mátrix sémáját, a keresett **B** mátrix a **B**=**GA** művelettel határozható meg.

$$\begin{array}{c|cccccccc|}
 & & & & & r.\ \text{oszlop} & & & \\ \hline
 & 1 & 0 & 0 & \dots & -\dfrac{a_{1s}}{a_{rs}} & \dots & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & \dots & -\dfrac{a_{2s}}{a_{rs}} & \dots & 0 & 0 \\
 & : & : & : & : & : & : & : & : \\
r.\ \text{sor} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{1}{a_{rs}} & \dots & 0 & 0 \\
 & : & : & : & : & : & : & : & : \\
 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\dfrac{a_{m-1,s}}{a_{rs}} & \dots & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\dfrac{a_{ms}}{a_{rs}} & \dots & 0 & 1 \\ \hline
\end{array}$$

Illusztrálás számpéldával, használjuk az előző példa adatait:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad r=2, \ \ s=3.$$

A **G** mátrix előállítása:

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{6}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{(-4)}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

A keresett **B** mátrix:

$$\mathbf{B}=\mathbf{GA}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{6}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{(-4)}{2} & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 1 & 6 & 4\\ 1 & 4 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -11 & 0 & 13\\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 4 & 12 & 0 & -3\end{bmatrix}.$$

Megjegyzések az előző két példához:

1. Ugyanaz az eredmény adódott, holott kétféle összefüggést használtunk:

$$(\mathbf{D}+\mathbf{E})\mathbf{A}-\frac{1}{a_{rs}}\mathbf{a}_s\mathbf{a}^{(r)} \qquad \text{ill.} \qquad \mathbf{GA}$$

2. A későbbi tanulmányok során az olvasó találkozni fog a pivotálás műveletével és bizonyára rá fog ismerni, hogy az ott megfogalmazott műveletek a fenti példákban bemutatott módon, azaz mátrixműveletekkel is leírhatók.

Javasoljuk az olvasónak a fentiek gyakorlását további számpéldákkal is, mivel ezek a műveletek nagyon sok feladat megoldásában kerülnek felhasználásra, többek között a lineáris egyenletrendszer megoldásánál, az inverzmátrix meghatározásánál, stb.

A gyakorlást úgy célszerű végezni, hogy felveszünk egy tetszőleges mátrixot, azon elvégezzük a sor kivonását az oszlop kinullázásával (vagy anélkül) és utána előállítjuk a **G** mátrixot és azzal is elvégezzük a kijelölt műveletet.

Előzetesen, ízelítőül néhány szót szólunk – nem törekedve a teljességre – a lineáris egyenletrendszer megoldásának két módszeréről. A lineáris egyenletrendszer mátrixos megfogalmazása **Ax**=**b**, ahol az **x** vektort kell meghatározni.

Gauss-eliminációs módszer:

Az **A** mátrixot több lépésben módosítjuk a sorkivonás módszerével.
Az 1. lépésben a 2. sortól kezdve az összes sorból úgy vonjuk ki az 1. sort, hogy az 1. oszlopot kinullázzuk (elimináljuk),
a 2. lépésben a 3. sortól kezdve az összes sorból úgy vonjuk ki az **új** 2. sort, hogy a 2. oszlopot kinullázzuk,
a 3. lépésben a 4. sortól kezdve az összes sorból úgy vonjuk ki az **új** 3. sort, hogy a 3. oszlopot kinullázzuk, és így folytatjuk a megoldást.
Az 1. sort nem módosítjuk, az újonnan számított 2. sort sem módosítjuk, az újonnan számított 3. sort sem módosítjuk, stb. Ha a fenti műveleteket a **b** vektoron is elvégezzük, akkor az így keletkező mátrixból egyszerű módon meghatározhatjuk a lineáris egyenletrendszer megoldását. A gyakorlati számolásnál a **b** vektort az **A** mátrix mellé írjuk, így a kibővített [**A**,**b**] mátrixon végezzük el a műveletet.

Gauss-Jordan módszer:

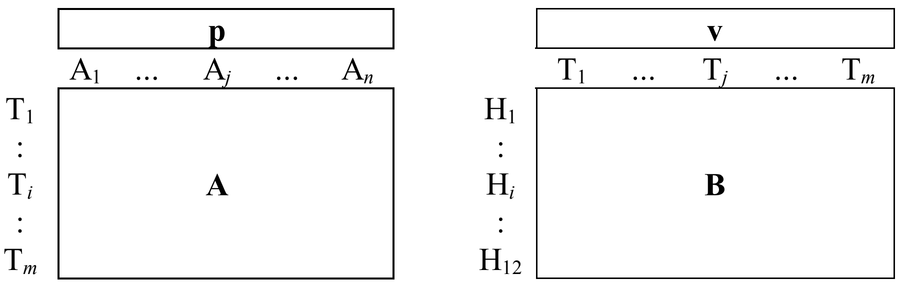
Az **A** mátrixot ennél a módszernél is több lépésben módosítjuk a sorkivonás módszerével, de eltérően a Gauss-eliminációs módszertől, itt az 1. lépésben az 1. sort elosztjuk az a_{11} elemmel, a 2. lépésben az újonnan számított 2. sort elosztjuk az új a_{22} elemmel, a 3.

lépésben az újonnan számított 3. sort elosztjuk az új a_{33} elemmel, stb. Ezen felül még van más változás is. Míg a Gauss-eliminációs módszernél csak az adott sortól **lefelé** történt a sor kivonása az oszlop kinullázásával, a Gauss-Jordan módszernél **minden** sorban (kivéve az aktuálisat, mert abban az előzőek szerint osztást végzünk) elvégezzük az oszlop kinullázását. Ha a kibővített [**A**,**b**] mátrixon végezzük el a műveletet, akkor az **A** mátrix helyén egységmátrixot kapunk, a **b** vektor helyén pedig az egyenletrendszer megoldását olvashatjuk ki.

<u>**Példa**</u>:
Egy vállalat *m* féle terméket állít elő *n* féle alkatrész összeszerelésével. Jelölje a_{ij} azt, hogy az *i*-edik termék összeszereléséhez a *j*-edik alkatrészből hány darabra van szükség. A b_{ij} jelentse azt, hogy egy adott év *i*-edik hónapjában a *j*-edik termékből hány darabot állítanak elő. Jelölje p_i az *i*-edik alkatrész egységárát. A v_i pedig jelentse az *i*-edik termék egy darabjának szerelési költségét.

Az alábbiakban 24 kérdést teszünk fel, amelyekre a választ mátrixműveletek segítségével kell megfogalmaznunk.
Először fogalmazzuk meg a feladatban szereplő adatokat mátrix, ill. vektoros formában. Legyen **A** mátrix a termékek összeszerelésének alkatrész-szükséglet mátrixa. Az **A** mátrix $\mathbf{a}^{(i)}$ sorvektora az egyes termékek összeszereléséhez szükséges *i*-edik alkatrész számát mutatja, az $\mathbf{a}_j$ oszlopvektora a *j*-edik termékhez szükséges alkatrészek darabszámát mutatja.
Legyen **B** mátrix a havonkénti termékelőállítás mátrixa. A **B** mátrix $\mathbf{b}^{(i)}$ sorvektora megmutatja, hogy az *i*-edik hónapban az egyes termékekből mennyit szerelnek össze, a $\mathbf{b}_j$ oszlopvektor pedig azt mutatja, hogy a *j*-edik termékből az egyes hónaapokban mennyit szerelnek össze.
Legyen **p** vektor az alkatrészek árvektora.
Legyen **v** vektor termékek szerelési költségvektora.
A megoldásoknál használjuk még az összegzővektort (**1**) és az egységvektorokat ($\mathbf{e}_i$).

Célszerű a számításhoz szükséges adatokat (mátrixokat, vektorokat) egy sémában felrajzolni, így könnyebbé és áttekinthetőbbé válik a műveletek megértése. A sémában sorokhoz és oszlopokhoz a példában szereplő megnevezéseket is javasoljuk feltüntetni, ekkor sokkal egyszerűbbé tehetjük a megoldások megkeresését.



A kérdések a következők:

1. **Mennyi az egyes hónapokban termelt termékek száma?**
A válasz: **B1**
A **B** mátrix **sorvektorai** mutatják a havi termelést a termékekből, így minden **sorában** össze kell adni a számokat, ezt a **B** mátrix és az összegzővektor **jobbról** való szorzása adja.

2. Mennyi az év során az egyes termékekből termelt mennyiség?

A válasz: $\mathbf{1B}$

A $\mathbf{B}$ mátrix **oszlopvektorai** mutatják a termékekből havonta termelt mennyiséget, így a $\mathbf{B}$ mátrix minden **oszlopában** össze kell adni a számokat, ezt a $\mathbf{B}$ mátrix és az összegzővektor **balról** való szorzása adja.

3. Havonként átlagosan hány terméket állítanak elő?

A válasz: $(1/12)\mathbf{1B1}$

Az éves szinten termelt termékek számát többféleképpen megkaphatjuk:

- a $\mathbf{B}$ mátrix minden elemét össze kell adni, ezt az $\mathbf{1B1}$ művelet adja,
- az egyes hónapokban termelt termékek számát ($\mathbf{B1}$) össze kell adni, ezt az $\mathbf{1}(\mathbf{B1})$ vagy a $(\mathbf{B1})\mathbf{1}$ skaláris szorzás adja,
- az egyes termékekből az év során termelt termékek számát ($\mathbf{1B}$) össze kell adni, $\mathbf{1}(\mathbf{1B})$ vagy a $(\mathbf{1B})\mathbf{1}$) skaláris szorzás adja.

Mindhárom esetben a vektorszorzatos felírást használtuk!

Ha elosztjuk az éves szinten termelt termékszámot a hónapok számával, azaz 12-vel, akkor a havi átlagot kapjuk.

4. Az *r*-edik hónapban hány terméket állítottak elő?

A válasz: $\mathbf{e}_r(\mathbf{B1})$ vagy $(\mathbf{B1})\mathbf{e}_r$ vagy $\mathbf{e}_r\mathbf{B1}$

A havonkénti termelés vektorának az r-edik eleme adja meg a választ, amelyet egységvektorral való skaláris szorzás ad.

5. Mennyi az *s*-edik termékből az *r*-edik hónapban gyártott mennyiség?

A válasz: $\mathbf{e}_r\mathbf{B}\mathbf{e}_s$

A $\mathbf{B}$ mátrix b_{rs} eleme a kérdés, amelyet egységvektorral való balról és jobbról szorzás ad.

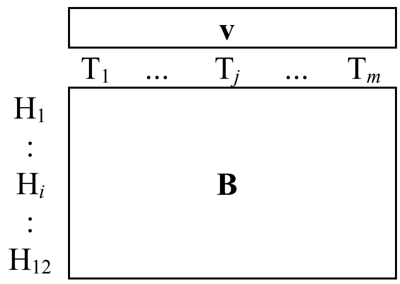
6. Mennyi az *s*-edik termékből az év során termelt mennyiség?

A válasz: $(\mathbf{1B})\mathbf{e}_s$ vagy $\mathbf{e}_s(\mathbf{1B})$ vagy $\mathbf{1B}\mathbf{e}_s$

A termékekből az év során termelt mennyiséget az $\mathbf{1B}$ vektor adja, amelynek s-edik eleme a kérdés, ezt pedig az egységvektorral való skaláris szorzás adja.

7. Mennyi az egyes hónapokban a szerelési költség?

A válasz: $\mathbf{Bv}$



Mint ismeretes a $\mathbf{B}$ mátrix j-edik **oszlopvektora** ($\mathbf{b}_j$) a j-edik termékből az egyes hónapokban előállított mennyiséget jelenti. A j-edik termék minden egyes darabját v_j költséggel szerelik össze, így a j-edik termék szerelési költségét havonta a $v_j\mathbf{b}_j$ vektor adja. A többi termék szerelési költségét hasonlóan kapjuk meg, így az összes termék havonkénti szerelési költsége

$$v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + \ldots + v_m\mathbf{b}_m,$$

amely a **B** mátrix **oszlopvektorainak** a **v** vektor elemeire vett lineáris kombinációja, ezt pedig a **Bv** művelet adja.

Másik megoldási mód: a H_i hónapban a termelés mennyiségét termékekenként a **B** mátrix *i*-edik sorvektora $\mathbf{b}^{(i)}$ adja. Ennek elemeit a termékek szerelési költségeivel szorozva és a szorzatokat összeadva, kapjuk az *i*-edik hónapban a szerelési költséget, amely a $\mathbf{b}^{(i)}\mathbf{v}$ skaláris szorzatnak felel meg. A többi hónapban is egy-egy skaláris szorzat adja a költséget, ezt pedig a **Bv** művelet írja le.

8. Mennyi az éves szinten a szerelési költség?

A válasz: **1**(**Bv**) vagy (**Bv**)**1** vagy **1Bv**

A havi szerelési költségeket (**Bv**) adó vektor elemeit össze kell adni, ezt egy összegzővektorral való skaláris szorzás adja.

9. Mennyi a havonkénti átlagos szerelési költség?

A válasz: (1/12)**1Bv**

Az éves szintű szerelési költséget osztjuk a 12-vel, akkor havi átlagot kapunk.

10. Mennyi az egyes hónapokban a szerelési költség termékfajtánként

A válasz: **BV** vagy **B<v>**

A **B** mátrix *j*-edik oszlopa a *j*-edik termékből az egyes hónapokban előállított mennyiséget jelenti. A *j*-edik termék minden egyes darabját v_j költséggel szerelik össze, így a *j*-edik termék szerelési költségét havonta úgy kapjuk meg, hogy a *j*-edik oszlop mindegyik elemét megszorozzuk v_j-vel. Hasonlóan járunk el a többi terméknél is, azaz a mátrix többi oszlopánál is. A fenti számítást a mátrixműveletek közül egy diagonális mátrix-szal való **jobbról** szorzási művelettel lehet megvalósítani. A **v** vektorból képezünk egy **V** diagonális mátrixot (a diagonális elemek a vektor elemei) és a **BV** vagy **B<v>** szorzást végezzük el.

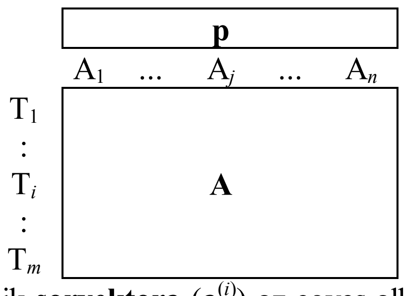
11. Egy-egy termék összesen hány darab alkatrészből áll?

A válasz: **A1**

Az **A** mátrix **sorai** mutatják az egyes termékekhez felhasznált alkatrészek mennyiségét, így az **A** mátrix soraiban lévő elemeket kell összeadni, amit az összegzővektorral való **jobbról** szorzás ad.

12. Mennyi egy-egy termék alkatrészköltsége?

A válasz: **Ap**



Tudjuk, hogy az **A** mátrix *i*-edik **sorvektora** ($\mathbf{a}^{(i)}$) az egyes alkatrészekből az *i*-edik termék egy darabjának előállításához szükséges mennyiséget jelenti. A sorvektor elemeit rendre az alkatrész egységárával szorozva, majd ezeket összegezve kapjuk az *i*-edik termék alkatrészköltségét, amely az $\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{p}$ skaláris szorzásnak felel meg. A többi termékre hasonló az alkatrészköltség számítása. Ez az **A** mátrix és a **p** vektor **Ap** szorzásának felel meg. Tehát az **Ap** szorzat termékegységenként adja meg az alkatrészköltséget.

Másik megoldási mód: Az **A** mátrix j-edik **oszlopvektora** ($\mathbf{a}_j$) megmutatja, hogy a j-edik alkatrészből az egyes termékekhez mennyit használnak fel. A j-edik alkatrész ára p_j, ekkor $p_j \cdot \mathbf{a}_j$ adja a felhasználást pénzben kifejezve, más szóval az alkatrészköltséget. A többi alkatrészre vonatkozó költségét hasonlóan kapjuk meg, így a termékenkénti összes alkatrész költséget a

$$p_1 \cdot \mathbf{a}_1 + p_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \ldots + p_n \cdot \mathbf{a}_n$$

összefüggés adja, amely az **A** mátrix **oszlopvektorainak** a **p** vektor elemeire vett lineáris kombinációja, ez pedig az **Ap** műveletnek felel meg.

13. Mennyi az *r*-edik termék alkatrészköltsége?

A válasz: $\mathbf{e}_r(\mathbf{Ap})$ vagy $\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{p}$

Az **Ap** vektor a termékenkénti alkatrészköltség vektora, ennek az r-edik elemére vagyunk kiváncsiak, amely egy egységvektorral való szorzással kapható meg.

Másrészt az **Ap** vektor r-edik eleme az $\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{p}$ skaláris szorzás.

14. Ha mindegyik termékből csak egyet gyártana a vállalat, akkor mennyi az összes alkatrészköltség?

A válasz: **1**(**Ap**) vagy (**Ap**)**1** vagy **1Ap**.

Az **Ap** vektor adja a termékenként felhasznált alkatrészek költségét. Ha ennek elemeit összeadjuk, akkor a teljes alkatrészköltséget kapjuk. A vektor elemeinek összeadását pedig a vektornak az összegzővektorral való skaláris szorzata adja, azaz a kérdezett alkatrészköltség: **1**(**Ap**) vagy (**Ap**)**1** vagy **1Ap**. Javasoljuk az olvasónak az **1Ap** szorzat értelmezését.

15. Mennyi a fenti esetben az egy termékre eső átlagos alkatrészköltség?

A válasz: $(1/m)$**1Ap**

Az **1Ap** jelenti az összes termékre az alkatrészköltséget, ha ezt elosztjuk a termékek számával (m), akkor az átlagos (egytermékre jutó) alkatrészköltséget kapjuk.

16. Mennyi egy-egy darab termékbe beépülő alkatrészek költsége alkatrészenként?

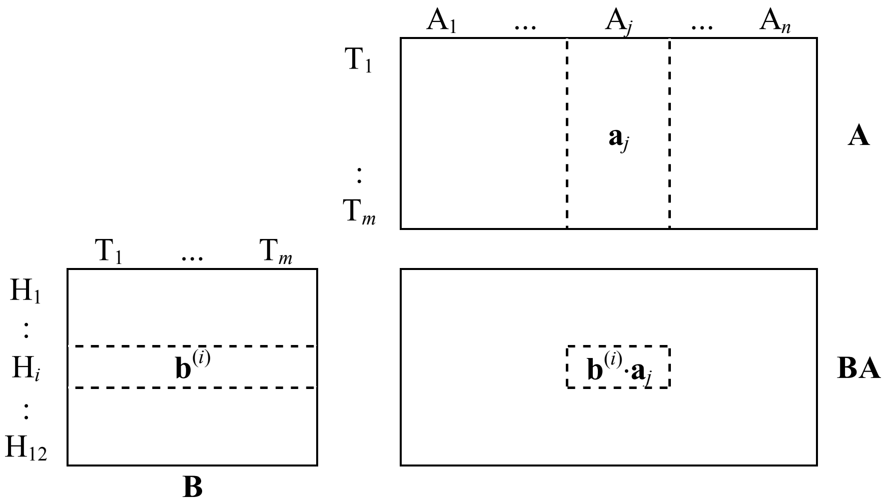
A válasz: **AP** vagy **A<p>**

Az **A** mátrix j-edik **oszlopvektora** a j-edik alkatrészből az egyes termékekhez felhasznált mennyiséget mutatja. Ha ezt az **oszlopvektort** megszorozzuk a j-edik alkatrész árával, p_j-vel, akkor az egyes termékekhez szükséges j-edik alkatrészt kapjuk pénzben kifejezve, azaz az alkatrészköltséget. A többi alkatrész esetében is az adott oszlopvektort be kell szorozni az adott alkatrész árával. Az oszlopok szorzását egy diagonális mátrix-szal való **jobbról** szorzási művelettel tudjuk megvalósítani. A **p** vektorból képezünk egy **P** diagonális mátrixot (a diagonális elemek a vektor elemei) és az **AP** vagy **A<p>** szorzást végezzük el.

17. A termelés során hónaponként az egyes alkatrészekből hány darabot használnak fel?

A válasz: **BA**

A megoldáshoz való eljutást segítheti az alábbi séma:



Arra a **C** mátrixra vagyunk kiváncsiak, amelynek c_{ij} eleme megmutatja, hogy az i-edik hónapban a j-edik alkatrészből mennyit használnak fel. A i-edik hónapban az egyes termékekből gyártott mennyiséget a **B** mátrix i-edik **sorvektora** ($\mathbf{b}^{(i)}$) adja. A j-edik alkatrészből az egyes termékek összeszereléséhez szükséges alkatrészmennyiséget pedig az **A** mátrix j-edik **oszlopvektora** ($\mathbf{a}_j$) adja. A T_1 termékből az i-edik hónapban b_{i1} mennyiséget szereltek össze és a T_1 termékhez a j-edik alkatrészből a_{1j} mennyiség kell, így a $b_{i1}\cdot a_{1j}$ szorzat azt mutatja meg, hogy az i-edik hónapban a j-edik alkatrészből mennyi lett felhasználva, ha csak a T_1-et szerelik össze. A többi termék összeszerelése is igényel A_i alkatrészlet a H_i hónapban, az összes terméket figyelembe véve

$$b_{i1}\cdot a_{1j} + b_{i2}\cdot a_{2j} + \ldots + b_{im}\cdot a_{mj}$$

az alkatrészszükséglet. Ez pedig a $\mathbf{b}^{(i)}\cdot\mathbf{a}_j$ skaláris szorzat. Ebből már látható, hogy az egyes hónapokban az egyes alkatrészekből felhasznált mennyiséget a **C**=**BA** mátrixszorzat szolgáltatja.

Javasoljuk az olvasónak, hogy ne csak ezen az ún. elemenkénti megoldással, hanem más úton is próbáljon eljutni a megoldást adó **BA** mátrixszorzáshoz.

18. Mennyi a hónaponként felhasznált alkatrészek költsége?

A válasz: (**BA**)**p** vagy **B**(**Ap**) vagy **BAp**

A hónaponkénti alkatrészigényt a **BA** mátrix írja le. Ennek j-edik **oszlopvektora** a $(\mathbf{BA})_j$ az A_j alkatrészből a havi felhasználást, a $p_j\cdot(\mathbf{BA})_j$ pedig a pénzben kifejezett felhasználást jelenti, más szóval az alkatrészköltséget. A

$$(\mathbf{BA})_1\cdot p_1 + (\mathbf{BA})_2\cdot p_2 + \ldots + (\mathbf{BA})_n\cdot p_n$$

összeg pedig az összes alkatrész költséget adja havonként. Ez a **BA** mátrix **oszlopvektorainak** a lineáris kombinációja, ebből pedig következik, hogy a keresett mátrix a (**BA**)**p** művelettel írható le. A zárójelezhetőség miatt ugyanez az eredmény adódik a **B**(**Ap**) művelettel is, amelynek ellenőrzését ill. levezetését az olvasóra bízzuk.

19. Mennyi a havi összes szerelési- költség és alkatrész költség?

A válasz: **Bv**+(**BA**)**p** vagy **B**(**v**+**Ap**)

Az előző kérdések eredményei alapján a havi szerelési költséget a **Bv** vektor, a havi alkatrész költséget a **B**(**Ap**) vektor adja, így az összes költség ezek összege, vagyis

Bv+**B**(**Ap**), ami azonos a **B**(**v**+**Ap**) eredménnyel. Javasoljuk az utóbbi szerinti értelmezést is.

20. Mennyi az évi összes szerelési- költség és alkatrész költség?

A válasz: **1**(**Bv**+(**BA**)**p**) vagy **1B**(**v**+**Ap**) vagy **1Bv**+**1BAp**

A havi szerelési költséget és alkatrészköltséget kell összeadni, ez pedig az összegzővektorral történő skaláris szorzást jelenti. Értelmezze a különböző összefüggéseket!

21. Mennyi a havi átlagos összköltség?

A válasz: (1/12)(**1Bv**+**1BAp**) vagy (1/12)**1B**(**v**+**Ap**)

Az összes költség osztva 12-vel adja meg a havi átlagot. Értelmezze az utóbbi összefüggést!

22. Mennyi az egy termékre jutó éves átlagos összköltség?

A válasz: [1/(**1B1**)**1B**(**v**+**Ap**)

Az év során **1B1** mennyiségű terméket szereltek össze, ha ezzel osztjuk az éves összköltséget, akkor a termékre vonatkozó átlagot kapjuk. Értelmezze az utóbbi összefüggést!

23. Egy adott hónapban q_1, q_2,..., q_n mennyiségű alkatrészből termékenként hány darab állítható elő?

A válasz: **xA**=**q** (**x**=?), ha létezik $\mathbf{A}^{-1}$, akkor $\mathbf{x}=\mathbf{q}\mathbf{A}^{-1}$ képlettel is felírható a megoldás

Jelölje az egyes termékekből előállítható mennyiséget x_1, x_2, ..., x_m; foglaljuk ezeket az **x** vektorba. Az i-edik termékhez az alkatrészszükségletet az **A** mátrix i-edik **sorvektora** ($\mathbf{a}^{(i)}$) mutatja. Az x_i mennyiségű i-edik termékhez az alkatrészszükséglet $x_i \cdot \mathbf{a}^{(i)}$. Az összes terméket figyelembevéve az alkatrészszükséglet

$$x_1 \cdot \mathbf{a}^{(1)} + x_2 \cdot \mathbf{a}^{(2)} + \ldots + x_m \cdot \mathbf{a}^{(m)},$$

amely az **A** mátrix **sorvektorainak** az **x** vektor elemeire vett lineáris kombinációja, ezt az **xA** művelet írja le. Ennek az alkatrészszükségletnek kell egyenlőnek lennie az adott alkatrészmennyiséggel, amit a **q** vektor jellemez. Összefoglalva a keresett **x** vektort az **xA**=**q** lineáris egyenletredszer megoldása adja. Amennyiben létezik az **A** mátrix inverze, úgy a megoldás $\mathbf{x}=\mathbf{q}\mathbf{A}^{-1}$ formában is felírható.

24. Egy adott hónapban q_1, q_2,..., q_n mennyiségű alkatrész beszerelésének mennyi a szerelési költsége és az alkatrészköltsége?

A válasz: **xv**+**qp**

A q_1, q_2, .., q_n mennyiségű alkatrész beszerelésével az előző pont szerint kiszámított x_1, x_2, .., x_m mennyiségű termék állítható elő, amelyeknek szerelési költségét az **xv** skaláris szorzat adja, ehhez jön még a q_1, q_2, .., q_n mennyiségű alkatrész ára, amelyet a **qp** skaláris szorzat ad.

4. Leontief-féle input-output modell

Tekintsünk egy gazdaság termelési modelljét, amelyben különböző szektorok (termelőágazatok) különböző termékek előállításával foglalkoznak. Tételezzük fel, hogy a modellben a termékek és a szektorok (termelőágazatok) között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van. Ezt a fajta termelési modellt Leontief-féle input-output modellnek nevezzük. Tehát minden terméket egyetlenegy szektor állít elő és fordítva, minden szektor egyetlenegy terméket termel.

Adott a modellben a **közvetlen ráfordítások mátrixa**, amelyet jelöljön a **B** mátrix. A **B** mátrix b_{ij} eleme azt mutatja, hogy a j-edik szektor (S_j) az általa előállított termék egységének előállítás**hoz** az i-edik termék**ből** (T_i) mennyit használ fel közvetlenül.
Adott a szektorok termelése (kibocsátása), jelölje ezt a **q** vektor, továbbá adott a termékek egységára (röviden ára), jelölje ezt a **p** vektor.
Mivel kölcsönösen egyértelmű a kapcsolat a szektorok és a termékek között, ezért az általánosság megsértése nélkül mondhatjuk azt, hogy a S_1 szektor a T_1, az S_2 szektor a T_2 termék előállításával, stb. foglalkozik. Innentől kezdve a szektorokat nem is említjük, hanem csak a termékeket. Ebben a megfogalmazásban a b_{ij} elem azt mutatja, hogy a j-edik termék (T_j) egységének előállítás**hoz** az i-edik termék**ből** (T_i) mennyi a közvetlen felhasználás. A **B** mátrix i-edik **sorvektora** ($\mathbf{b}^{(i)}$) azt mutatja, hogy a termelés során az i-edik termék**ből** közvetlenül mennyit használnak fel az egyes termékek előállítás**hoz**. A **B** mátrix j-edik **oszlopvektora** ($\mathbf{b}_j$) pedig azt jelzi, hogy a termelés során a j-edik termék előállítás**hoz** az egyes termékek**ből** mennyit használnak fel. A **q** vektort a termékek bruttó termelésének nevezzük. A termékek száma legyen n, így írható, hogy $\mathbf{B}\in R^{n\times n}$, $\mathbf{q}\in R^n$, $\mathbf{p}\in R^n$. A mátrixot és a vektorokat az alábbi sémában is közöljük, amely remélhetőleg majd megkönnyíti a következőkben elvégzendő modell-elemzést. Több kérdést is felvethetünk, amelyekre a választ mátrixműveletekkel fogjuk megadni.

		q_1	...	q_j	...	q_n
		T_1	...	T_j	...	T_n
p_1	T_1	b_{11}	…	b_{1j}	…	b_{1n}
:	:	:		:		:
p_i	T_i	b_{i1}	…	b_{ij}	…	b_{in}
:	:	:		:		:
p_n	T_n	b_{n1}	…	b_{nj}	…	b_{nn}

1. Határozzuk meg az anyagköltség mátrixot!

Arra vagyunk kiváncsiak, hogy mennyi a közvetlen felhasználás pénzben kifejezve. Ha a **B** mátrix mindegyik **sorvektorát** megszorozzuk a megfelelő termék árával, akkor a keletkező **R** mátrix r_{ij} eleme azt mutatja, hogy a j-edik termék egységének előállításához az i-edik termékből hány pénzegység értékű mennyiséget használunk fel közvetlenül. Ezt az **R** mátrixot nevezzük anyagköltség mátrixnak. Ismeretes, hogy egy ilyen műveletet egy diagonális mátrix-szal való **balról** szorzással lehet előállítani. A **p** árvektor elemeiből készítsünk egy diagonális **P** mátrixot (ármátrix) és ha ezzel **balról** megszorozzuk a **B** mátrixot, akkor az anyagköltség mátrixot kapjuk, azaz **R**=**PB**, vagy vektorosan **R**=<**p**>**B**.

2. Határozzuk meg az anyagköltség mátrix ismeretében a közvetlen ráfordítás mátrixot!

Az **R**=**PB** összefüggésből induljunk ki, szorozzuk meg az egyenletet **balról** a **P** diagonális mátrix inverzével, ekkor $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{PB}$, a jobboldalon $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}=\mathbf{E}$ és **EB**=**B**, így a megoldás $\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}$ vagy vektorosan $\mathbf{B}=\langle\mathbf{p}\rangle^{-1}\mathbf{R}$. Megjegyezzük, hogy diagonális mátrix inverzét egyszerűen lehet képezni, a diagonális elemek inverzét (reciprokát) kell venni.

3. Határozzuk meg a bruttó termeléshez tartozó közvetlen ráfordítás mátrixot!

Ha a **B** mátrix mindegyik **oszlopvektorát** megszorozzuk a megfelelő bruttó termeléssel, akkor a keletkező **C** mátrix c_{ij} eleme azt mutatja, hogy a *j*-edik termék bruttó termelésének megfelelő mennyiségű termék előállításához az *i*-edik termékből mennyit használunk fel közvetlenül. Ismeretes, hogy egy ilyen műveletet egy diagonális mátrix-szal való **jobbról** szorzással lehet előállítani. A **q** bruttó termelés vektor elemeiből készítsünk egy diagonális **Q** mátrixot és ha ezzel **jobbról** megszorozzuk a **B** mátrixot, akkor a **C** mátrixot kapjuk, azaz **C**=**BQ**, vagy vektorosan $\mathbf{C}=\mathbf{B}\langle\mathbf{q}\rangle$.

4. Határozzuk meg a bruttó termeléshez tartozó nettó kibocsátást!

A **B** közvetlen ráfordítás mátrix $\mathbf{b}_j$ oszlopvektora azt mutatja meg, hogy a *j*-edik termék **egységének** előállításához az egyes termékekből közvetlenül mennyit használnak fel. Ha a *j*-edik termékből q_j mennyiséget termelnek (állítanak elő), akkor a közvetlen felhasználás vektora $q_j\mathbf{b}_j$. A felhasználás a többi termékre is hasonlóan írható fel, így a **q** bruttó termeléshez a felhasználás vektora

$$q_1\mathbf{b}_1 + q_2\mathbf{b}_2 + \ldots + q_n\mathbf{b}_n,$$

azaz a **B** mátrix **oszlopvektorainak** lineáris kombinációja, amely a **Bq** szorzásnak felel meg. Ha a **q** bruttó termeléshez **Bq** mennyiséget felhasználunk, akkor a nettó termelés, vagy nettó kibocsátás vektora $\mathbf{q} - \mathbf{Bq}$. Jelölje a nettó kibocsátást az **r** vektor, így

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} - \mathbf{Bq}.$$

A nettó kibocsátás tehát megmutatja, hogy a termelés során felhasznált termékek után mennyi marad ún. végső felhasználási célokra.

Az $\mathbf{r} = \mathbf{q} - \mathbf{Bq}$ formulához az alábbi okoskodással is hozzájuthatunk. Ha az *i*-edik termék közvetlen felhasználás $\mathbf{b}^{(i)}$ **sorvektorát** skalárisan megszorozzuk a **q** vektorral, akkor ez a mennyiség megadja, hogy a **q** termeléshez mennyit használunk fel az *i*-edik termékből. A $\mathbf{b}^{(i)}\mathbf{q}$ mennyiségek vektorát pedig a **Bq** szorzással kapjuk.

5. Határozzuk meg a nettó kibocsátáshoz tartozó bruttó termelést!

Az $\mathbf{r} = \mathbf{q} - \mathbf{Bq}$ összefüggésből induljunk ki és ebből rendezéssel fejezzük ki a **q** vektort. A következők adódnak: $\mathbf{r} = \mathbf{q} - \mathbf{Bq} = \mathbf{Eq} - \mathbf{Bq} = (\mathbf{E} - \mathbf{B})\mathbf{q}$. A **q** vektor ebből a

$$\mathbf{q} = (\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{r}$$

formulával számítható, amennyiben létezik az inverzmátrix. Az inverz létezésének vizsgálatával itt nem kívánunk foglalkozni. Az $(\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1}$ inverzmátrixnak nagy jelentősége van a modellben, ezért ezt **Leontief-féle inverznek** nevezik és **T**-vel jelölik, ahol tehát

$$\mathbf{T} = (\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1},$$

így a bruttó termelés és a nettó termelés közötti kapcsolatot a

$$\mathbf{q} = \mathbf{Tr}, \qquad \text{ill. az} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{Bq}$$

formulák adják.

6. Határozzuk meg az egyes termékek egységnyi mennyiségű előállítása során keletkező hozzáadott értéket vagy nettó értéket!

A **B** közvetlen ráfordítás mátrix $\mathbf{b}^{(i)}$ **sorvektora** megmutatja, hogy az i-edik termékből mennyit használnak fel az egyes termékek egységnyi mennyiségének előállításához. Ha az i-edik termék egységára p_i, akkor felhasználás pénzbeli értéke $p_i\mathbf{b}^{(i)}$. A pénzben kifejezett felhasználás a többi termékre is hasonlóan írható fel, így a **p** árvektorhoz a pénzbeli felhasználás vektora

$$p_1\mathbf{b}^{(1)} + p_2\mathbf{b}^{(2)} + \ldots + p_n\mathbf{b}^{(n)},$$

azaz a **B** mátrix **sorvektorainak** lineáris kombinációja, amely a **pB** szorzásnak felel meg. A **p** árrendszer esetén a pénzben kifejezett felhasználás tehát **pB**, a kettő különbsége a keletkező hozzáadott érték vagy nettó érték. A hozzáadott érték vektora **p** – **pB**. Jelölje a hozzáadott értéket az **m** vektor, így

$$\mathbf{m} = \mathbf{p} - \mathbf{pB}.$$

A hozzáadott érték tehát megmutatja, hogy az egyes termékek egységnyi mennyiségű előállítása során mennyi a hozzáadott érték.

Az **m** = **p** – **pB** formulához az alábbi okoskodással is hozzájuthatunk. Ha a **p** árvektort skalárisan megszorozzuk a j-edik termék közvetlen felhasználás vektorával, a $\mathbf{b}_j$ **oszlopvektorral**, akkor ez amennyiség megadja, hogy a **p** árak mellett pénzben kifejezve mennyit használunk fel az egyes termékekből. A $\mathbf{pb}_j$ mennyiségek vektorát pedig a **pB** szorzással kapjuk.

7. Határozzuk meg a hozzáadott értékhez tartozó árvektort!

Az **m** = **p** – **pB** összefüggésből induljunk ki és ebből rendezéssel fejezzük ki a **p** vektort. A következők adódnak: **m** = **p** – **pB** = **pE** – **pB** = **p**(**E** – **B**). A **p** vektor ebből a

$$\mathbf{p} = \mathbf{m}(\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1}$$

formulával számítható. Itt láthatjuk az $(\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1}$ **Leontief-féle inverz** jelentőségét.
Az árrendszer és a hozzáadott érték közötti kapcsolatot

$$\mathbf{p} = \mathbf{mT}, \qquad \text{ill. az} \qquad \mathbf{m} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{pB}$$

formulák adják.

8. A közvetlen ráfordítások különböző formája
Az alapértelmezés mellett még három értelmezést is használhatunk. Mindegyik értelmezésben a **közvetlen ráfordításokat** kapjuk.

a) Az első értelmezést (alapértelmezést) a fejezet elején ismertettünk. A lényege az, hogy az egyes termékek **egységnyi mennyiségű előállításához** a többi **termékből hány egységet** használunk fel. Tehát ebben az értelmezésben azt adjuk meg, hogy a **természetes egységhez** mennyi a közvetlen felhasználás **természetes egységben** kifejezve. A közvetlen felhasználás mátrixa **B**.

b) A közvetlen ráfordítást úgy is értelmezhetjük, hogy **természetes egységhez** mennyi a közvetlen felhasználás **pénzegységben** kifejezve. A közvetlen felhasználás mátrixa $\mathbf{R}=\mathbf{PB}$ vagy $\mathbf{R}=<\mathbf{p}>\mathbf{B}$, amit a 2. kérdésnél mutattunk be, ez az értelmezés is szokásos, anyagköltségnek is szokás nevezni.

c) A közvetlen ráfordítást úgy is értelmezhetjük, hogy a **pénzegységhez** mennyi a felhasználás **természetes egységben** kifejezve. Tekintsük a *j*-edik terméket. Egy **természetes egységnyi mennyiség előállításához** a többi termékből a **természetes egységben** kifejezett felhasználást a $\mathbf{b}_j$ oszlopvektor mutatja. Ha nem **természetes egységnyi mennyiség előállításához** akarjuk meghatározni a felhasználást, hanem **pénzbelihez**, akkor a felhasználást az $\frac{1}{p_j}\mathbf{b}_j$ oszlopvektor mutatja. Tehát a *j*-edik oszlop minden elemét el kell osztani a *j*-edik termék árával, vagy más szóval meg kell szorozni a *j*-edik termék árának reciprokával. Ezt az műveletet minden oszlopra kiterjesztve egy diagonális mátrix-szal való **jobbról** szorzás adja. Korábbról pedig tudjuk, hogy a $\mathbf{P}^{-1}$ mátrix alkalmas erre. A közvetlen felhasználás mátrixa tehát $\mathbf{D}=\mathbf{BP}^{-1}$ vagy $\mathbf{D}=\mathbf{B}<\mathbf{p}>^{-1}$.

d) A közvetlen ráfordítást úgy is értelmezhetjük, hogy egy **pénzegységnyi mennyiséghez** mennyi a felhasználás **pénzegységben** kifejezve. A közvetlen felhasználás mátrixa $\mathbf{A}=\mathbf{PBP}^{-1}$, vagy $<\mathbf{p}>^{-}\mathbf{B}<\mathbf{p}>^{-1}$, amely azonnal adódik a b) és c) értelmezésből.

Összefoglalva: a **B** mátrix elemeinek mértékegysége t.m./t.m., az **R** mátrix elemeinek mértékegysége p.m./t.m., a **D** mátrix elemeinek mértékegysége t.m./p.m., az **A** mátrix elemeinek mértékegysége p.m./p.m., ahol t.m.=természetes mennyiség ill. p.m.= pénzmennyiség. A legritkábban a c) pontbeli értelmezést használják.

9. A Leontief-féle inverz különböző értelmezése

A Leontief-féle inverz: $\mathbf{T} = (\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1}$, amelynek az alábbi három értelmezését adjuk:

a) Induljunk ki a bruttó termelés és a nettó termelés közötti kapcsolatot kifejező

$$\mathbf{q} = \mathbf{Tr}$$

formulából. Ha $\mathbf{r} = \mathbf{e}_j$, akkor $\mathbf{q} = \mathbf{Te}_j = \mathbf{t}_j$. Ebből a következő olvasható ki: A **T** mátrix $\mathbf{t}_j$ **oszlopvektora** azt a **bruttó termelést** adja, amely ahhoz szükségeltetik, hogy a *j*-edik termékből egységnyi a nettó kibocsátás, a többi termékből pedig zérus. Tehát a **T** mátrix ezen értelmezése szerint speciális nettó kibocsátásokhoz szükséges bruttó termeléseket mutatja, mégpedig **oszloponként**.

b) Induljunk ki az árrendszer és a hozzáadott érték közötti kapcsolatot kifejező

$$\mathbf{p} = \mathbf{mT}$$

formulából. Ha $\mathbf{m} = \mathbf{e}_i$, akkor $\mathbf{p} = \mathbf{e}_i\mathbf{T} = \mathbf{t}^{(i)}$. Ebből a következő olvasható ki: A **T** mátrix $\mathbf{t}^{(i)}$ **sorvektora** azt az **árrendszer** adja, amely esetén az i-edik termékben egységnyi a hozzáadott érték, a többi termékben pedig zérus. Tehát a **T** mátrix ezen értelmezése szerint speciális hozzáadott értékekhez adja meg az árrendszert, mégpedig **soronként**.

c) Ennél az értelmezésnél az alábbi okoskodással élünk.
Ha **r** mennyiséget termelünk, akkor ehhez **Br** mennyiséget fel kell használni, amit meg kell termelni. Viszont a **Br** termeléséhez **B**(**Br**) mennyiséget kell felhasználni, amit szintén meg kell termelni. A **B**(**Br**) termeléséhez **B**(**B**(**Br**)) mennyiséget kell felhasználni, amit szintén meg kell termelni. A fenti gondolatmenetet folytatva a **q** bruttó termelést a

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} + \mathbf{Br} + \mathbf{B}(\mathbf{Br}) + \mathbf{B}(\mathbf{B}(\mathbf{Br})) + \ldots$$

formula írja le, amelyet átrendezve az alábbi használható formulát nyerjük:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{E} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^3 + \ldots)\,\mathbf{r}.$$

Ha ezt összevetjük a $\mathbf{q} = \mathbf{Tr}$ összefüggéssel, akkor azt kapjuk, hogy

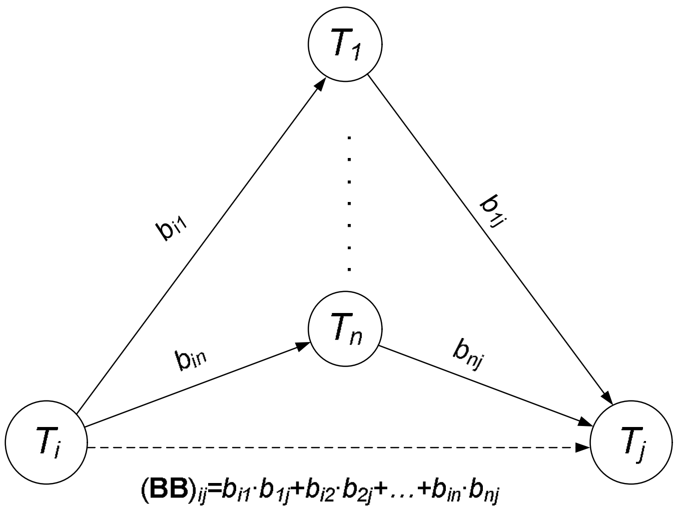
$$\mathbf{T} = \mathbf{E} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^3 + \ldots$$

Itt egy pillanatra meg kell állni. Két kérdés is felmerülhet az olvasóban. A fenti ún. Neumann-féle hatványsor konvergens-e és ha konvergens, akkor vajon a Leontief-inverz lesz-e a végtelen hatványsor összege. E helyen ezeknek a feltételeit nem részletezzük, mivel célunk a mátrixműveletek gyakorlása.
Az alábbiakban vizsgáljuk meg a közvetlen ráfordítás mátrix hatványait, először a $\mathbf{B}^2$-et vizsgáljuk. A $\mathbf{B}^2=\mathbf{BB}$ szorzatmátrix ij elemét jelöljük $(\mathbf{BB})_{ij}$-vel. A $(\mathbf{BB})_{ij}$ pedig az alábbi szerint részletezhető:

$$(\mathbf{BB})_{ij} = \mathbf{b}^{(i)}\mathbf{b}_j = b_{i1}\cdot b_{1j} + b_{i2}\cdot b_{2j} + b_{i3}\cdot b_{3j} + \ldots + b_{in}\cdot b_{nj}.$$

Ezt a szorzatot értelmezzük: Az egységnyi T_j termékhez a T_1 termékből b_{1j} mennyiséget használunk fel, viszont az egységnyi T_1 termékhez a T_i termékből $b_{i1}\cdot$mennyiséget használunk fel, ez azt jelenti, hogy az egységnyi T_j termékhez a T_i termékből a felhasználás $b_{i1}\cdot b_{1j}$ mennyiség. Tehát a T_j termékhez a T_i termékből a T_1 terméken keresztüli, nem közvetlen, **áttételes** felhasználás $b_{i1}\cdot b_{1j}$. A fenti képlet második tagja pedig -az előbbiek szerint – azt fejezi ki, hogy a T_j termékhez a T_i termékből a T_2 terméken keresztüli, áttételes felhasználás $b_{i2}\cdot b_{2j}$. Hasonlóan mindegyik tag a T_j termékhez a T_i termékből történő felhasználást fejezi ki más-más áttételen keresztül. Ezek összege adja T_j termékhez a T_i termékből az összes, egy terméken keresztüli (**egy áttételes**) felhasználást. Ez a felhasználást **közvetett** felhasználásnak nevezzük. A T_j termékhez a T_i termékből a közvetlen felhasználás, mint tudjuk b_{ij}. Ha ez zérus, azaz T_j és T_i között nincs közvetlen felhasználás, akkor még lehet köztük közvetett felhasználás.
Összefoglalva tehát a $\mathbf{B}^2$ mátrix is felhasználást fejez ki, de nem közvetlen felhasználás, hanem **egyetlen** terméken keresztüli **közvetett** felhasználást.

Az **egy** terméken keresztüli közvetett felhasználást az alábbi ábrával szemléltetjük:

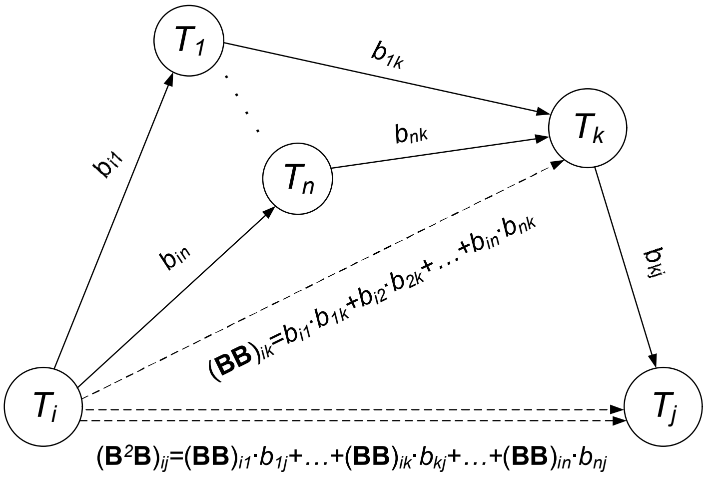


A $\mathbf{B}^3$ mátrix elemeinek vizsgálata ennek ismeretében már egyszerű lesz. A $\mathbf{B}^3 = \mathbf{B}^2\mathbf{B}$ szorzatmátrix ij elemét jelöljük $(\mathbf{B}^2\mathbf{B})_{ij}$-vel, amely a következőképpen részletezhető:

$$(\mathbf{B}^2\mathbf{B})_{ij} = (\mathbf{BB})^{(i)}\mathbf{b}_j = (\mathbf{BB})_{i1}\cdot b_{1j} + (\mathbf{BB})_{i2}\cdot b_{2j} + \ldots + (\mathbf{BB})_{ik}\cdot b_{kj} + \ldots + (\mathbf{BB})_{in}\cdot b_{nj}\,.$$

Az összegben mindegyik tag a T_j és T_i között közvetett felhasználást mutatja, de **két áttételen** keresztül. A $(\mathbf{BB})_{ik}\cdot b_{kj}$ tag jelentése: Az egységnyi T_j-hez a T_k-ból közvetlenül b_{kj} mennyiséget használunk fel, viszont az egységnyi T_k-hoz a T_i-ből $(\mathbf{BB})_{ik}\cdot$mennyiséget használunk fel, de nem közvetlenül, hanem egy-egy termék közvetítésével, ez azt jelenti, hogy az egységnyi T_j termékhez a T_i termékből a felhasználás $(\mathbf{BB})_{ik}\cdot b_{kj}$ mennyiség, de ez nem közvetlen felhasználás, hanem **két áttételen** keresztüli közvetett felhasználás.
Összefoglalva tehát a $\mathbf{B}^3$ mátrix is felhasználást fejez ki, de nem közvetlen felhasználás, hanem **két** terméken keresztüli közvetett felhasználást.

A két terméken keresztüli közvetett felhasználást az alábbi ábrával szemléltetjük:



Hasonlóan értelmezhető a többi hatvány is: A $\mathbf{B}^k$ mátrix a $(k$-1) terméken keresztüli közvetett felhasználást fejezi ki.

A $\mathbf{T} = (\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1}$ Leontief-féle inverz tehát a közvetlen és a közvetett kapcsolatok összességét fejezi ki, ezért szokás **teljes ráfordítás mátrixnak** is nevezni.

5. Feladatok

Az alábbiakban két feladatot közlünk számadatok nélkül. Az olvasó keresse meg a megoldást. Ellenőrzés céljából megadjuk a megoldást. Javasoljuk, hogy vegyen fel számadatokat és így a mátrixműveletek elvégzését is gyakorolhatja.

<u>**1. Feladat**</u>:

Egy vállalat háromféle terméket (T) állít elő háromféle alkatrész (A) összeszerelésével. Legyen adott az alábbiakban a termeléssel kapcsolatos **A**, **B** mátrix és a **c**, **d**, **f** vektor.
Az a_{ij} azt jelenti, hogy az i-edik alkatrészből a j-edik termék összeszereléséhez hány darabra van szükség.
A b_{ij} azt jelenti, hogy az i-edik negyedévben a j-edik termékből hány darabot állítanak elő.
A c_i a T_i termék szerelési költsége.
A d_i az A_i alkatrészből felhasznált mennyiséget jelenti egy adott időszakban.
Az f_i az i-edik negyedévben felhasznált alkatrészek összköltsége.

A mátrixműveletek segítségével válaszoljon az alábbi kérdésekre!

1. Mennyi a szerelési költség az egyes negyedévekben?
2. Mennyi az egyes negyedévekben az egyes alkatrészekből felhasznált menyiség?
3. Az egyes termékekből mennyit tud előállítani a vállalat, ha az alkatrészekből a **d** vektornak megfelelő mennyiséget használ fel egy adott időszakban?
4. Mennyi az egyes alkatrészek ára, ha az egyes negyedévekben az **f** vektornak megfelelő volt az alkatrészköltség?
5. Az egyes termékekben mennyi az alkatrészek költsége?

<u>**2. Feladat**</u>:

Egy fuvarozó vállalat k kereskedelmi egységbe (üzletbe, boltba) m féle terméket szállít n gépkocsival. Az a_{ij} jelentse az i-edik gépkocsival a j-edik termékből szállított mennyiséget egy-egy forduló alkalmával. Az b_{ij} jelentse az i-edik gépkocsival a j-edik üzletbe a fordulók számát. A p_i jelentse az i-edik termék egységárát.
Mátrixaritmetikai jelölésekkel válaszoljon az alábbiakra!

1. Mennyi az egyes üzletekbe az egyes termékekből szállított mennyiség?
2. Mennyi az egyes gépkocsikkal fordulónként szállított termékek értéke?
3. Mennyi az egyes üzletekbe a szállított termékek összértéke?
4. Mennyi az r-edik gépkocsival fordulónként szállított termékek értéke?
5. Mennyi az s-edik üzletbe szállított termékek összértéke?
6. Mennyi a t-edik üzletbe szállított termékek értéke termékenként?

1. feladat megoldása:

1. $\mathbf{Bc}$
2. $\mathbf{BA}^T$ vagy $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$
3. $\mathbf{Ax}=\mathbf{d}$, $\mathbf{x}=?$
4. $(\mathbf{BA}^T)\mathbf{p}=\mathbf{f}$, $\mathbf{p}=?$ vagy $\mathbf{p}(\mathbf{A}^T\mathbf{B})=\mathbf{f}$, $\mathbf{p}=?$
5. $\mathbf{pA}$, mátrixszorzatosan $\mathbf{p}^T\mathbf{A}$. Inverz segítségével $((\mathbf{BA}^T)^{-1}\mathbf{f})^T\mathbf{A}$ vagy $(\mathbf{f}(\mathbf{A}^T\mathbf{B})^{-1})^T\mathbf{A}$

2. feladat megoldása:

1. a) $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$, ha az eredménymátrix sorai a termékeket, oszlopai az üzleteket reprezentálják

   b) $\mathbf{B}^T\mathbf{A}$, ha az eredménymátrix sorai az üzleteket, oszlopai a termékeket reprezentálják
2. $\mathbf{Ap}$
3. a) $\mathbf{p}(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$, mátrixszorzatosan $\mathbf{p}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \mathbf{p}^T\mathbf{A}^T\mathbf{B} = (\mathbf{Ap})^T\mathbf{B}$

   b) $(\mathbf{B}^T\mathbf{A})\mathbf{p} = \mathbf{B}^T\mathbf{Ap} = \mathbf{B}^T(\mathbf{Ap})$
4. $\mathbf{a}^{(r)}\mathbf{p}$ skalárszorzat, vagy $(\mathbf{Ap})_r = \mathbf{e}_r(\mathbf{Ap})$ skalárszorzat, mátrixszorzatosan $\mathbf{e}_r^T\mathbf{Ap}$
5. a) $(\mathbf{p}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}))_s = (\mathbf{p}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}))\mathbf{e}_s$ skalárszorzat, mátrixszorzatosan $\mathbf{p}^T\mathbf{A}^T\mathbf{B}\mathbf{e}_s$

   b) $((\mathbf{B}^T\mathbf{A})\mathbf{p})_s = \mathbf{e}_s((\mathbf{B}^T\mathbf{A})\mathbf{p})$ skalárszorzat, mátrixszorzatosan $\mathbf{e}_s^T\mathbf{B}^T\mathbf{Ap}$
6. a) $<\mathbf{p}>(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$ mátrix t-edik oszlopvektora, azaz $(<\mathbf{p}>(\mathbf{A}^T\mathbf{B}))\mathbf{e}_t = (<\mathbf{p}>\mathbf{A}^T)(\mathbf{B}\mathbf{e}_t)$

   b) $(\mathbf{B}^T\mathbf{A})<\mathbf{p}>$ mátrix t-edik sorvektora, azaz $\mathbf{e}_t((\mathbf{B}^T\mathbf{A})<\mathbf{p}>)$ skalárszorzat, mátrixszorzatosan $\mathbf{e}_t^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}<\mathbf{p}> = (\mathbf{e}_t^T\mathbf{B}^T)(\mathbf{A}<\mathbf{p}>) = (\mathbf{B}\mathbf{e}_t)^T(\mathbf{A}<\mathbf{p}>)$