Lineáris programozási feladat megoldása SCILAB programcsomag segítségével

A SCILAB matematikai programcsomag az alábbi általános alakú lineáris programozási feladatot (LP) tudja megoldani.

$$
\begin{gathered}
cx \longrightarrow \min! \\
Ex = e \\
Kx \leqq k \\
xa \leqq x \leqq xf
\end{gathered}
$$

ahol $c \in R^n$ vektor a célfüggvény együtthatókat, az $E \in R^{m_e \times n}$ mátrix az egyenlőséges feltételek együtthatóit, a $K \in R^{m_k \times n}$ mátrix a $\leqq$ típusú egyenlőtlenséges feltételek együtthatóit tartalmazza. Az $e \in R^{m_e}$ vektor az egyenlőséges feltételek jobboldalát, a $k \in R^{m_k}$ vektor pedig a $\leqq$ típusú egyenlőtlenséges feltételek jobboldalát tartalmazza. Az $xa \in R^n$ ill. az $xf \in R^n$ vektorok az $x \in R^n$ döntési változó vektorának elemeire előírt egyedi alsó ill. felső korlátokat tartalmazzák. A Scilab programcsomag a fenti LP feladat megoldására az alábbi parancsot használja:

[xopt,lagr,fopt]=linpro(c,A,b,xa,xf,me,x0)

ahol a **linpro()** Scilab beépített függvénye, amely az LP feladat megoldási algoritmusát foglalja magában. A függvény bemenő adatai a következők. A **c** oszlopvektor a célfüggvény-együtthatóikat, az **A** mátrix az összes feltétel együtthatóit, a **b** oszlopvektor pedig az összes feltétel jobboldalát tartalmazza. Az **xa** és az **xf** oszlopvektorok az egyedi alsó és felső korlátok vektora. Az **me** argumentum az egyenlőséges feltételek darabszámát, az **x0** oszlopvektor pedig egy induló vektort tartalmaz, ez utóbbit legtöbbször elhagyjuk. A későbbiekben erről még szólunk.

Tehát első lépésként elő kell állítani a fentebb felsorolt bemenő paramétereket, majd a parancs kiadása után az **xopt** oszlopvektorban az optimális megoldásvektort, a **lagr** vektorváltozóban a Lagrange szorzók, azaz a duál változók optimális értékeit, az **fopt** változóban pedig a célfüggvény optimális értékét kapjuk meg. A bemenő és a kimenő változóknak természetesen más nevet is adhatunk.

Az **A** mátrixot és a **b** vektort kétféle módon állthatjuk elő. Első lehetőségként felsoroljuk az összes feltétel adatát a mátrixba ill. a vektorba. Második lehetőségként külön előállítjuk az egyenlőséges és az egyenlőtlenséges feltételek megfelelő adatát egy-egy mátrixba (**E**,**K**) és oszlopvektorba (**e**,**k**) és utána ezeket egyetlen mátrixba ill. vektorba foglaljuk, ami a következőképpen hajtható végre:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= [\mathbf{E};\mathbf{K}] \\
\mathbf{b} &= [\mathbf{e};\mathbf{k}]
\end{aligned}
$$

A könnyebb áttekinthetőség miatt ezen utóbbi módszert javasoljuk, a mintapéldákat is így mutatjuk be.

1. példa:

Tekintsük az alábbi lineáris programozási feladatot (megtalálható: Dr. Nagy Tamás: Operációkutatás, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 1998, egyetemi jegyzet 106. oldalán):

$$
\begin{array}{rcl}
2x_1 + x_2 + \ \ x_3 & \leqq & 80 \\
x_1 + x_2 + \ \ x_3 & \leqq & 70 \\
3x_1 + x_2 + 2x_3 & \geqq & 100 \\
x_1, x_2, x_3 & \geqq & 0 \\
15x_1 + 4x_2 + 10x_3 & \longrightarrow & \min!
\end{array}
$$

Egyenlőséges feltétel nincs, így me=0. A 3. feltétel $\geqq$ típusú egyenlőtlenséges feltétel, így ezt (-1)-el való szorzással $\leqq$ típusúvá kell alakítani. A döntési változókra az alsó korlát zérus, egyedi felső korlát viszont nincs megadva, ezt kétféleképpen kezelhetjük, vagy megadunk egy nagy korlátot, aminél biztosan nem lehet nagyobb a döntési változó értéke, vagy az **xf=[]** parancsot használjuk, ez utóbbit javasoljuk a későbbi használatra. Az alábbiak mutatják a feladat megoldását a Scilab segítségével:

```
–>c=[15;4;10]
```

```
c =
15.
4.
10.

-->A=[2,1,1;1,1,1;-3,-1,-2]
A =
2. 1. 1.
1. 1. 1.
- 3. - 1. - 2.


-->b=[80;70;-100]
b =
80.
70.
- 100.

-->xa=zeros(3,1)
xa =
0.
0.
0.

-->xf=[1000;1000;1000]
xf =
1000.
1000.
1000.

-->me=0
me =
0.

-->[xopt,lagr,fopt]=linpro(c,A,b,xa,xf,me)
fopt =
450.
lagr =
0.
0.
0.
1.
1.
6.
xopt =
10.
50.
10.
```

A Lagrange szorzók (duál változók) száma azért nem három, mert az egyedi alsó korlátokat is feltételként kezeli a program. A duál változók értéke pedig (-1)-szerese a fentebb említett jegyzetben definiált duál változóknak. A Scilab ugyanis másképpen értelmezi a duál változókat, ez azonban nem jelent nagy problémát, ha tudjuk a duál változók valódi jelentését. Amennyiben nincsenek egyedi korlátok megadva, akkor a feltételekhez tartozó duál változókat írja ki a program, például az alábbi hívásnál:

```
-->[xopt,lagr,fopt]=linpro(c,A,b)
fopt =
450.
lagr =
```

1.
1.
6.
xopt =
10.
50.
10.

Az alábbiakban néhány függvényhívást mutatunk be a **linpro()** függvény alaposabb megismerésére.

–>[xopt]=linpro(c,A,b,xa,xf,me)
xopt =
10.
50.
10.

–>[xopt]=linpro(c,A,b,xa,xf)
xopt =
10.
50.
10.

–>[xopt]=linpro(c,A,b)
xopt =
10.
50.
10.

–>[xopt]=linpro(c,A,b,xa,[])
xopt =
10.
50.
10.

–>[xopt]=linpro(c,A,b,xa,[],0)
xopt =
10.
50.
10.

–>linpro(c,A,b,xa,[],0)
ans =
10.
50.
10.

–>[x,dual,f]=linpro(c,A,b,xa,xf,me);

A **linpro()** legutolsó hívásakor a parancs végrehajtódott, tehát a kimenő paraméterek értéket kaptak, viszont a képernyőre nem íródtak ki. A kimenő paraméterek kiíratása az alábbiak szerint történik:

–>x
x =
10.
50.
10.

–>dual
dual =

0.
0.
0.
1.
1.
6.

–>f
f =
450

A példákból kitűnik, hogy a parancs bizonyos paraméterei elhagyhatók. Az egyedi korlátok közül vagy mindkettőt szerepeltetjük vagy mindkettőt elhagyjuk. Amennyiben az egyenlőséges feltételek számát tartalmazó változót elhagyjuk, akkor a program azt zérusnak tekinti, tehát minden feltételt egyenlőtlenség típusúnak tekint a Scilab. Ha két kimenő paramétert hagyunk meg, akkor a Lagrange szorzó és a döntési változók optimális értékét adja vissza a program. További tanulmányozást az olvasóra bízzuk.

Mint említettük a **linpro()** függvény utolsó paramétereként megadhatunk valamilyen kezdőértéket is. Az **x0** paraméter vagy az összes feltételt tejesítő induló vektor vagy kétféle sztring (' ') lehet.
Ha x0='v', akkor a program kezdővektornak egy extremális pontot (csúcspontot) számol ki,
ha x0='g', akkor a program kezdővektornak egy lehetséges megoldást (nem szükségképpen extremális pontot) számol ki.

Például az alábbi megoldások is alkalmazhatók. Mivel általában nem áll rendelkezésünkre megengedett megoldás, ezért ezek a lehetőségek a felhasználók többségét nem érdeklik.

–>x0=[0;40;30];

–>[xopt]=linpro(c,A,b,x0)
xopt =
10.
50.
10.

–>[xopt,lagr,fopt]=linpro(c,A,b,xa,xf,esfsz,x0)
fopt =
450.
lagr =
0.
0.
0.
1.
1.
6.
xopt =
10.
50.
10.

–>[xopt]=linpro(c,A,b,'v')
xopt =
10.
50.
10.

–>[xopt]=linpro(c,A,b,'g')
xopt =
10.
50.

10.

2. példa:

Tekintsük az alábbi lineáris programozási feladatot (megtalálható: Dr. Nagy Tamás: Operációkutatás, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 1998, egyetemi jegyzet 110. oldalán):

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \quad x_3 &\quad = \quad 100\\
x_1 + x_2 \qquad\quad &\quad \geqq \quad 30\\
x_2 + x_3 &\quad \leqq \quad 60\\
2x_2 - x_3 &\quad \leqq \quad 0\\
x_1, x_2, x_3 &\quad \geqq \quad 0\\
20x_1 + 22x_2 + 24x_3 &\quad \longrightarrow \quad \max!
\end{aligned}$$

Egy darab egyenlőséges feltétel van, így me=1. A 2. feltételt (-1)-el kell szorozni. Mivel a **linpro()** program minimum feladatot old meg, ezért a célfüggvényt is be kell szorozni (-1)-el.

A megoldás menete a következő:

```
–>c=[-20;-22;-24];
–>E=[1,1,1];
–>e=[100];
–>K=[-1,-1,0;0,1,1;0,2,-1];
–>k=[-30;60;0];
–>A=[E;K];
–>b=[e;k];
–>xa=zeros(3,1);
–>xf=[];

–>[xopt,lagr,fopt]=linpro(c,A,b,xa,xf,1)
fopt =
- 2240.
lagr =
0.
- 2.
0.
20.
0.
4.
0.
xopt =
40.
0.
60.
```

3. példa:

Tekintsük az alábbi lineáris programozási feladatot (megtalálható:Nagy Tamás:Operációkutatás, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 1998, Egyetemi jegyzet 102. oldalán):

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - \quad x_3 - 2x_4 &\quad = \quad 60\\
x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &\quad \geqq \quad 100\\
x_1 + \qquad\quad x_3 + 2x_4 &\quad \leqq \quad 80\\
x_1, x_4 &\quad \geqq \quad 0\\
x_2 &\quad \leqq \quad 0\\
2x_1 - x_2 + 5x_3 - 4x_4 &\quad \longrightarrow \quad \max!
\end{aligned}$$

Egy darab egyenlőséges feltétel van, így me=1. A 2. feltételt (-1)-el kell szorozni. A célfüggvényt is be kell szorozni (-1)-el. Az egyedi korlátokat az alábbiak szerint kezeljük. Az x_1, x_4 változók egyedi alsó és felső korlátja az előzőek alapján egyszerűen kezelhető, az x_2 változó felső korlátja zérus, alsó korlátja legyen -1000, az x_4 változó korlátjai -1000 és 1000.

A megoldás menete a következő:

```
–>c=[-2;1;-5;4];
–>E=[1,1,-1,-2];
–>e=[60];
–>K=[-1,-1,2,-3;1,0,1,2];
–>k=[-100;80];
–>A=[E;K];
–>b=[e;k];
–>xa=[0;-1000;-1000;0];
–>xf=[1000;0;1000;1000];

–>[xopt,lagr,fopt]=linpro(c,A,b,xa,xf,1)
fopt =
- 140.
lagr =
0.
0.
0.
- 7.
- 1.678D-16
1.
3.
xopt =
120.
- 100.
- 40.
8.882D-16
```

Az x_4 változó értéke $8.882 * 10^{-16}$, így zérusnak tekinthető.